Механика
(БИЛЕТЫ)
3 семестр

Семенова
Дарья
группа 205
2019-2020

1. Кинематика материальной точки
2. Тангенциальное и нормальное ускорения
3. Относительность механического движения
4. Принцип относительности. Преобразования Галилея и преобразования Лоренца
5. Кинематика твердого тела
6. Матрица поворота тела
7. Кинематика вращающихся систем отсчета
8. Законы Ньютона
9. Силы в механике
10. Релятивистское уравнение движения
11. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции
12. Импульс частицы и системы частиц. Движение центра масс
13. Закон сохранения импульса
14. Реактивное движение
15. Работа и потенциальная энергия
16. Потенциальная энергия механических систем
17. Кинетическая энергия частицы и системы частиц
18. Кинетическая энергия твердого тела
19. Закон сохранения энергии в механике
20. Импульс и энергия в теории относительности
21. Момент импульса частицы и системы частиц. Момент силы
22. Момент импульса твердого тела
23. Теорема моментов. Закон сохранения момент импульса
24. Материальная точка в центральном поле
25. Законы Кеплера
26. Плоское движение твердого тела
27. Момент инерции твердого тела
28. Системы со связями. Степени свободы. Обобщенные координаты
29. Виртуальные перемещения. Виртуальная работа. Идеальные связи
30. Уравнения Лагранжа. Обобщенные силы
31. Функция Лагранжа. Обобщенные импульсы
32. Уравнения Гамильтона. Канонические переменные
33. Гамильтониан консервативной системы
34. Равновесие системы и его устойчивость
35. Колебания в системах с одной степенью свободы
36. Физические эффекты в колебательных системах
37. Нормальные колебания и нормальные координаты
38. Колебания струны.
39. Случайные величины и вероятности
40. Распределение Гиббса
41. Размер и масса молекул
42. Измерение постоянной Больцмана
43. Распределение энергии по степеням свободы
44. Диффузия и теплопроводность
45. Вязкость жидкости
46. Движение вязкой жидкости
47. Уравнения динамики сплошной среды
48. Звуковая волна

1. Кинематика материальной точки.

Кинематика – раздел механики, изучающий движение тел без рассмотрения причин этого движения.

Материальная точка – тело, размерами которого можно пренебречь.

($\forall$ тело можно представить как совокупность материальных точек)

I. Движение точки по прямой линии.

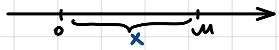
2 проблемы: измерение расстояний и промежутков времени.

- Расстояния: сравним с длиной некоторого тела, принятого за эталон. X [м]
- Время: сравним с продолжительностью некоторого процесса, принятого за эталон. t [с]

Метр – расстояние, которое проходит свет в вакууме $\approx$ за $(300\,000\,000)^{-1}$ с

Секунда – продолжительность $\approx 10^{10}$ колебаний электрода в атоме цезия.

Ось координат – прямая линия, на которой выбрано начало отсчёта, положительное направление и единица измерения длины.

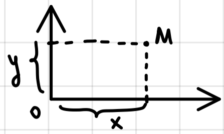


x-координата точки, >0 если правее начала отсчёта, <0 если левее.

Закон движения точки по прямой: $x = x(t)$

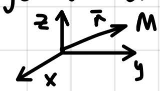
II. Движение точки по плоскости.

Декартова система координат – система взаимно перпендикулярных осей координат, имеющих общее начало отсчёта. $y = y(t)$, $x = x(t)$



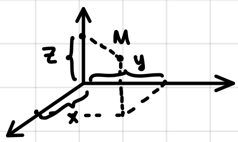
III. Движение точки в пространстве.

Радиус-вектор точки – вектор, проведенный от начала отсчета к данной материальной точке.



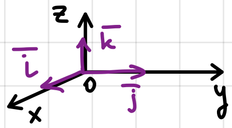
$\bar{r} = \bar{r}(t)$

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$

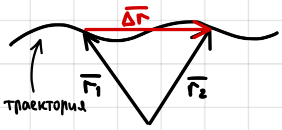


Орты декартовых координат – единичные векторы, направленные вдоль декартовых осей координат.

$|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$, $\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z \Rightarrow |\bar{r}| = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ [м]



Перемещение точки – разность радиус-векторов точки, взятых в 2 разных момента времени



$\Delta\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ [м]

$\bar{r}_1(t) = \bar{r}(t_1)$

$\bar{r}_2(t) = \bar{r}(t_2)$

Длительность перемещения: $\Delta t = t_2 - t_1$ [с]

Траектория – линия движения точки.

Скорость материальной точки – отношение перемещения точки к его длительности в пределе, когда $\Delta t \to 0$. $\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\bar{r}/\Delta t$

Скорость – производная радиус-вектора по времени: $\bar{v} = \dfrac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}$

Декартова компонента скорости – составляющая вектора скорости, параллельная декартовым осям координат. $\bar{v} = \bar{i}v_x + \bar{j}v_y + \bar{k}v_z$, $\bar{v} = \dfrac{d\bar{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z) = \bar{i}\dfrac{dx}{dt} + \bar{j}\dfrac{dy}{dt} + \bar{k}\dfrac{dz}{dt} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{v}_x = \dot{x}$, $\bar{v}_y = \dot{y}$, $\bar{v}_z = \dot{z}$. $|\bar{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ [м/с]

Ускорение материальной точки – производная скорости т. по времени $\bar{a} = \dfrac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}} = \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ [м/с²]

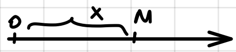
Декартовы компоненты ускорения – составляющие вектора ускорения, параллельные декартовым осям координат. $\bar{a} = \bar{i}a_x + \bar{j}a_y + \bar{k}a_z$, $\bar{a} = \dfrac{d\bar{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\bar{i}v_x + \bar{j}v_y + \bar{k}v_z) = \bar{i}\dfrac{dv_x}{dt} + \bar{j}\dfrac{dv_y}{dt} + \bar{k}\dfrac{dv_z}{dt}$

$a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, $a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$, $a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} = \dfrac{d^2z}{dt^2}$

$|\bar{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ [м/с²]

IV. Равномерное движение точки по прямой.

Равномерным называется движение с постоянной скоростью.



$v_x = const = \frac{dx}{dt} \to dx = v_x dt \to \int_{x_0}^{x} dx = v_x \int_0^t dt \to v_x t = x - x_0$

Закон равномерного движения: $x(t) = x_0 + v_x t$

V. Прямолинейное равнопеременное движение.

Прямолинейное равнопеременное движение – с постоянным ускорением.

$a_x = const \to a_x = \frac{dv_x}{dt} \to dv_x = a_x dt \to \int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = a_x \int_0^t dt \to a_x t = v_x - v_{x0}$

Скорость: $v_x(t) = v_{x0} + a_x t$

$v_x = \frac{dx}{dt} \to dx = v_x dt \to dx = (v_{x0} + a_x t)\,dt \to \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (v_{x0} + a_x t)\,dt \to x - x_0 = v_{x0} \cdot t + a_x \frac{t^2}{2}$

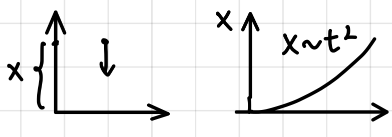
Движение: $x(t) = x_0 + v_{x0} t + a_x t^2/2$

Путь: $S = at^2/2$

Измерение ускорения: $a = 2S/t^2$

VI. Свободное падение точки

Движение, при котором точка движется лишь под действием силы тяжести.



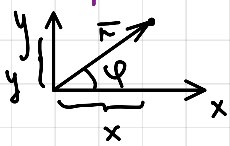
$$\begin{cases} v_x(t) = gt \\ x(t) = gt^2/2 \end{cases}$$

$g = 9,8$ м/с² – ускорение свободного падения.

VII. Движение тела, брошенного под углом к горизонту.

По горизонтали: равномерно. По вертикали: с постоянным ускорением g, напр. вниз.

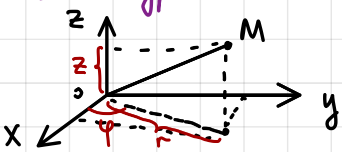
Полярные координаты: r, φ



$0 \le r < \infty$

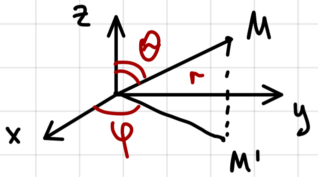
$0 \le \varphi \le 2\pi$

Цилиндрические координаты: r, φ, z



$0 \le r < \infty$

Сферические координаты: r, θ, φ



$0 \le r < \infty$

$0 \le \theta \le \pi$

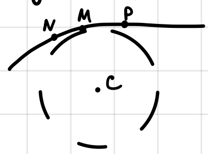
$0 \le \varphi \le 2\pi$

2. Тангенсальное и нормальное ускорение.

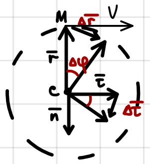
Составляющие ускорения, параллельно и перпендикулярно вектору скорости.

$\bar a = \bar\tau a_\tau + \bar n a_n$, $|\bar\tau| = |\bar n| = 1$

Круг кривизны кривой в точке — круг, проходящий через данную точку M кривой и две другие точки кривой N и P в пределе, когда $N \to M$, $P \to M$



$\bar\tau = \frac{\bar v}{v} \Rightarrow \bar v = \bar\tau \cdot v$, $\bar a = \frac{d}{dt}(\bar\tau v) = \bar\tau \frac{dv}{dt} + v\frac{d\bar\tau}{dt}$

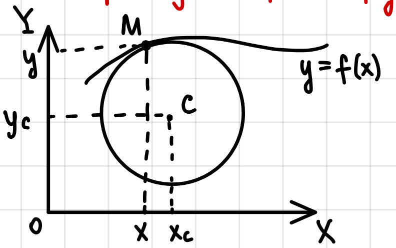


$dt \to 0$ и $d\bar\tau \parallel \bar n \Rightarrow d\bar\tau = \bar n |d\bar\tau|$

$\frac{|d\bar\tau|}{\underbrace{|\bar\tau|}_{1=}} = \frac{dr}{R} \to |d\bar\tau| = \frac{dr}{R} \to d\bar\tau = \bar n \frac{dr}{R} \to \frac{d\bar\tau}{dt} = \bar n \cdot \frac{1}{R}\frac{dr}{dt} = \bar n \frac{V}{R}$

$\Rightarrow \boxed{\bar a = \bar\tau \frac{dv}{dt} + \bar n \frac{v^2}{R}}$, где $\boxed{\frac{dv}{dt} = \dot v = a_\tau}$ и $\boxed{\frac{v^2}{R} = a_n}$

Кривизна кривой, заданной в декартовых системах координат.



Найдем радиус кривизны f(x) в т. с координатой x.

$M(x,y)$: $\begin{cases} (x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = R^2 \\ f(x) = y(x) \\ f'(x) = y'(x) \\ f''(x) = y''(x) \end{cases}$ ← в точке M

$f'(x) = \frac{dt}{dx}$, $f''(x) = \frac{d^2t}{dx^2}$

$y'(x) = \frac{dy}{dx}$, $y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$

дифференцируем по x: $(x-x_c) + (y-y_c)\cdot y' = 0$

$1 + (y')^2 + (y-y_c)\cdot y'' = 0$

$\Rightarrow y - y_c = -\frac{1+(y')^2}{y''}$, $x - x_c = -(y-y_c)\cdot y' = \frac{1+(y')^2}{y''}\cdot y' \Rightarrow R = \frac{\left(1+(y')^{2/3}\right)^{3/2}}{|y''|}$

Пример: $y = ax^2$:

R – радиус кривизны

$y' = \frac{dy}{dx} = 2ax$, $y'(0) = 0$

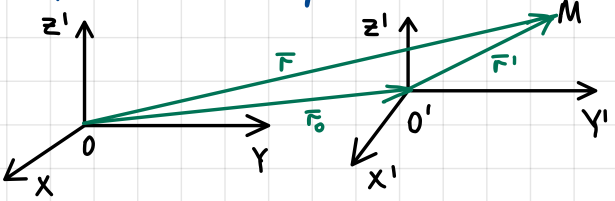
$y'' = 2a$

$\Rightarrow R = \frac{1}{|y''|} = \frac{1}{2a}$

3. Относительность механического движения

Относительность механического движения — различие движений одного и того же тела относительно разных тел отсчёта.

Будем считать, что движущаяся система сохраняет свою ориентацию в пространстве (не вращается).



$\bar r = \bar r_0 + \bar r'$

$\dot{\bar r} = \dot{\bar r}_0 + \dot{\bar r}' \to \bar v = \bar v_0 + \bar v'$

$\ddot{\bar r} = \ddot{\bar r}_0 + \ddot{\bar r}' \to \bar a = \bar a_0 + \bar a'$

$\frac{d\bar r}{dt}, \frac{d\bar v}{dt}$ – отн-но неподвижной с-мы

$\frac{d\bar r_0}{dt}, \frac{d\bar v_0}{dt}$ – начала отсчета подвижной системы отн-но неподвижной

$\frac{d\bar r'}{dt}, \frac{d\bar v'}{dt}$ – отн-но подвижной с-мы

Абсолютная скорость = относительная скорость + скорость системы отсчёта

Абсолютное ускорение = относительное ускорение + ускорение системы отсчёта

4. Принцип относительности. Преобразования Галилея и Лоренца.

I. Принцип относительности Галилея.

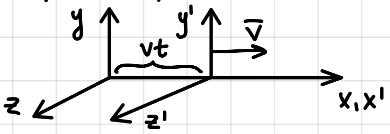
Никакими механическими опытами, проведенными в данной с-ме отсчёта нельзя установить, находится ли данная система в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

Математическая формулировка

Уравнения, выражающие различные законы, должны быть инвариантны относительно преобразования, описывающего переход от неподвижной СО к системе, движущейся прямолинейно и равномерно.

$$\begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Преобразование Галилея



Найдем связь скоростей:

$$\begin{cases} v_x = v_x' + v \\ v_y = v_y' \\ v_z = v_z' \end{cases}$$

– правило сложения скоростей Галилея

5. Кинематика твёрдого тела.

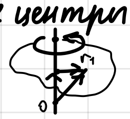
Твёрдое тело – система материальных точек, расстояние между любой парой которых всегда остаются неизменными.

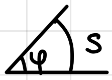
Поступательное движение – движение, при котором ориентация тела в пространстве не меняется. $\bar{v}_i = v$, $\bar{a}_i = a$ (скорости и ускорения всех точек одинаковы).

Вращение тела вокруг неподвижной оси – движение, при котором все точки тела движутся по окружности, а все центры окружностей лежат на одной прямой (ось вр.)

Измерение угла в радианах.

$S = R\varphi$, $\varphi = \frac{dr}{dt} = \frac{dS}{dt} = r_1 \frac{d\varphi}{dt} = r_1\dot{\varphi}$



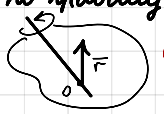


$\varphi = S/2$

Угловая скорость вращения тела – производная угла поворота тела по времени. $\omega = \dot{\varphi}$ $\left[\frac{рад}{с}\right]$

Скорость движения произвольной точки тела – $v = \frac{dr}{dt} \approx \frac{dS}{dt} = \frac{r_\perp d\varphi}{dt} = \omega r_\perp$ ($r_\perp$ – расстояние от точки до оси)

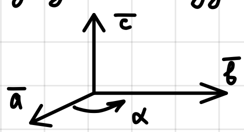
Вектор угловой скорости – вектор, направленный вдоль оси вращения по правилу правого винта и равный по модулю производной угла поворота тела по времени.



$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$

Векторное произведение векторов – вектор, перпендикулярный векторам сомножителей, направленный по правилу правого винта и равный по модулю произведению модулей векторов на синус угла м/у ними. $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$, $c = a \cdot b \cdot \sin\alpha$

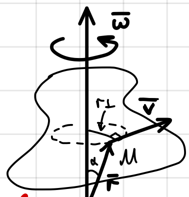
$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \bar{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \bar{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$



Вектор скорости произвольной точки тела:

$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \rightarrow \dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dt} = [\bar{\omega}, \bar{r}]$

$\dot{\bar{A}} = \frac{d\bar{A}}{dt} = [\bar{\omega}, \bar{A}]$



$\bar{v} = [\bar{\omega}, \bar{r}]$

$v = \omega r \sin\alpha = \omega r_\perp$

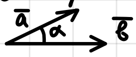
Теорема эйлера (движение тела с одной неподвижной точкой.

Движение тела с одной неподвижной точкой в любой момент времени можно рассматривать как вращение вокруг некоторой оси, проходящей через точку закрепления.

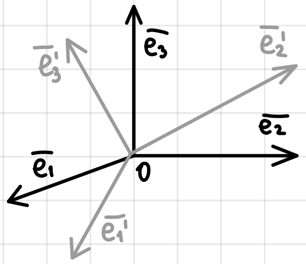
Мгновенная ось вращения – ось, на которой лежат неподвижные в данный момент времени точки тела.

6. Матрица поворота тела.

Скалярное произведение векторов – произведение модулей векторов на косинус угла между ними. $(\bar{a},\bar{b}) = \bar{a}\bar{b} = ab\cos\alpha = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

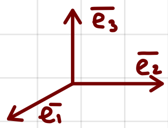


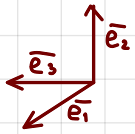
Матрица поворота тела – матрица, составленная из скалярных произведений ортов 2ух координатных систем. Нужна для описания ориентации тела в пространстве.



$$S_{ij} = \bar{e}_i \bar{e}_j', \quad i,j = \overline{1,3}, \qquad S = \begin{pmatrix} e_1e_1' & e_1e_2' & e_1e_3' \\ e_2e_1' & e_2e_2' & e_2e_3' \\ e_3e_1' & e_3e_2' & e_3e_3' \end{pmatrix}$$

Например поворот тела на 90° вокруг $\bar{e}_1$





$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

транспонированная $T = S^T$ описывает обратный поворот

Преобразование декартовых компонент вектора при повороте с-мы координат.

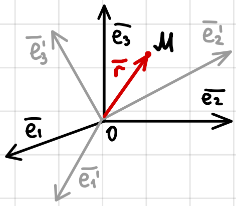
$$\bar{r} = \bar{e}_1x_1 + \bar{e}_2x_2 + \bar{e}_3x_3 = \bar{e}_1'x_1' + \bar{e}_2'x_2' + \bar{e}_3'x_3'$$

Умножим скалярно на вектор $\bar{e}_1$:

$$x_1 = \bar{e}_1\bar{e}_1'x_1' + \bar{e}_1\bar{e}_2'x_2' + \bar{e}_1\bar{e}_3'x_3' = S_{11}x_1' + S_{12}x_2' + S_{13}x_3'$$

$$x_1 = \sum_i^3 S_{1i}x_i', \quad x_2 = \sum_i^3 S_{2i}x_i', \quad x_3 = \sum_i^3 S_{3i}x_i' \implies x_i = \sum_{j=1}^3 S_{ij}x_j'$$

Аналогично $x_i' = \sum_{j=1}^3 S_{ji}x_j$, где $S_{ji} = T_{ji}$, а $T = S^T$.



Двойной поворот и матричное произведение.

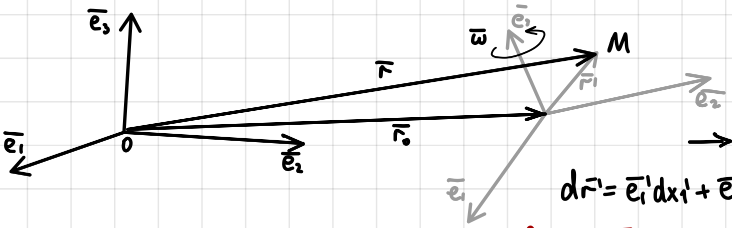
Два поворота: $\hat{A}$ и $\hat{B}$. $x_1, x_2, x_3 \to x_1', x_2', x_3' \to x_1'', x_2'', x_3''$

$$x_i' = \sum_{j=1}^3 A_{ij}x_j, \quad x_k'' = \sum_{i=1}^3 B_{ki}x_i' \implies x_k'' = \sum_{i=1}^3 B_{ki}\sum_{j=1}^3 A_{ij}x_j$$

$x_k'' = \sum_{j=1}^3 x_j \sum_{i=1}^3 B_{ki}A_{ij} = \sum_{i=1}^3 C_{kj}x_j$, где $C_{kj} = \sum_{i=1}^3 B_{ki}A_{ij}$ – произведение матриц. ! $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$

7. Кинематика вращающихся систем отсчёта.

Рассмотрим точку М и неподвижную и вращающуюся с-мы отсчета.



$\bar r = \bar r_0 + \bar r' \longrightarrow d\bar r = d\bar r_0 + d\bar r'$

$\bar r' = \bar e_1' x_1' + \bar e_2' x_2' + \bar e_3' x_3' \longrightarrow$

$\longrightarrow d\bar r' = \bar e_1' dx_1' + \bar e_2' dx_2' + \bar e_3' dx_3' + x_1' d\bar e_1' + x_2' d\bar e_2' + x_3' d\bar e_3'$

$d\bar r' = \bar e_1' dx_1' + \bar e_2' dx_2' + \bar e_3' dx_3' + x_1' \underbrace{[\bar\omega, \bar e_1']dt}_{d\bar e_1'} + x_2' \underbrace{[\bar\omega, \bar e_2']dt}_{d\bar e_2'} + x_3' \underbrace{[\bar\omega, \bar e_3']dt}_{d\bar e_3'}$

Связь перемещений точки отн-но неподвижной и вращ. СО:

$dr' = d'\bar r' + [\bar\omega, \bar r']dt \Longrightarrow d\bar r = d\bar r_0 + d'\bar r' + [\bar\omega, \bar r']dt$

Связь скоростей: $\bar v = \bar v_0 + \bar v' + [\bar\omega, \bar r']$

$d\bar v = d\bar v_0 + d\bar v' + [\bar\omega, d\bar r']$ ($\bar\omega$ = const), где $\bar v' = \bar e_1' \dot x_1' + \bar e_2' \dot x_2' + \bar e_3' \dot x_3'$

$\Rightarrow d\bar v = d\bar v_0 + d'\bar v' + [\bar\omega, \bar v']dt + [\bar\omega, d'\bar r' + [\bar\omega, \bar r']dt] = d\bar v_0 + d'\bar v' + [\bar\omega, \bar v']dt + [\bar\omega, d'\bar r'] + [\bar\omega, [\bar\omega, \bar r']dt]$

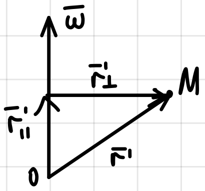
Связь ускорений: $\bar a = \bar a_0 + \bar a' + 2[\bar\omega, \bar v'] + [\bar\omega, [\bar\omega, \bar r']]$

$\bar a = \bar a' + \bar a_n + \bar a_k$

Переносное ускорение: $\bar a_n = \bar a_0 + [\bar\omega, [\bar\omega, \bar r']]$

Кориолисово ускорение: $\bar a_k = 2[\bar\omega, \bar v']$

Центростремительное ускорение:



$\bar r' = \bar r'_\parallel + \bar r'_\perp \Rightarrow$

$[\bar\omega, \bar r'] = [\bar\omega, \bar r'_\parallel + \bar r'_\perp] = [\bar\omega, \bar r'_\parallel] + [\bar\omega, \bar r'_\perp] = [\bar\omega, \bar r'_\perp]$

$\{[\bar a, [\bar b, \bar c]] = \bar b(\bar a, \bar c) - \bar c(\bar a, \bar b)\}$

$[\bar\omega, [\bar\omega, \bar r']] = [\bar\omega, [\bar\omega, \bar r'_\perp]] = \bar\omega(\bar\omega, \bar r'_\perp) - \bar r'_\perp \overset{=0}{(\bar\omega, \bar\omega)} = -\bar r'_\perp \omega^2$

центростремительное ускорение точки $\bar a_{цс}$

$\bar a = \bar a' + \bar a_0 + \bar a_{цс} + \bar a_k$

$\bar a = \bar a' + \bar a_0 - \omega^2 \bar r'_\perp + 2[\bar\omega, \bar v']$

($\bar a$ – ускорение т. отн-но неподвижной СО;
$\bar a'$ – ускорение т. отн-но движущейся СО;
$\bar a_0$ – ускорение начала отсчета движущейся СО)

8. Законы Ньютона.

1ый закон Ньютона:

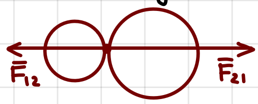
Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока другие тела не заставят его изменить это состояние.

2ой закон Ньютона:

Произведение массы материальной точки на ускорение равно действующей на неё силе: $m\bar{a} = \bar{F}$

3ий закон Ньютона:

Действие 2ух тел друг на друга равны и противонаправлены: $\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$



Приложены к разным телам, направлены вдоль одной прямой и имеют одинаковую природу.

Масса – мера отклика тела на действие силы.

{ [m] = 1 кг. Масса эталонного тела – цилиндр из сплава платины и иридия диаметром 39 мм и такой же высотой.

Сила – мера действия на данное тело других тел.

{ [F] = 1Н. Сила, вызывающая ускорение в 1 м/с² у тела массой 1кг. $Н = кг \cdot м/с^2$

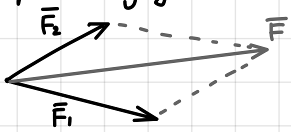
- Для измерения массы произвольного тела, подействуем на него силой 1Н и измерим ускорение тела a_1. $m = 1Н/a_1$
- Для измерение силы, подействуем этой силой на телой массой в 1кг и измерим ускорение тела a_2. $F = 1кг \cdot a_2$

! Второй закон Ньютона перестаёт действовать:

1) при очень больших скоростях движения тела (близким к скорости света) $a = 0$
2) для очень маленьких тел в очень малых областях в пространстве (электрон в атоме) нельзя ввести понятия ускорение масса сила

Правила сложения сил:

Если на материальную точку одновременно действуют две силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, то она начинает двигаться так, как если бы действовала 1 сила, равная векторной сумме первых двух сил.

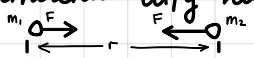


$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots$

9. Силы в механике.

Гравитационные силы

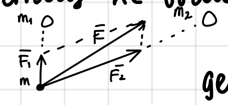
Закон всемирного тяготения: любые 2 материальные точки (МТ) притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния м/g ними:



$F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$, $G = 6{,}6 \cdot 10^{-11} \dfrac{Н \cdot м^2}{кг^2}$ – гравитационная постоянная.

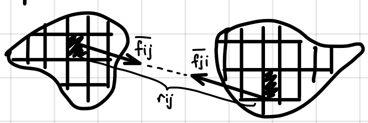
Принцип суперпозиции:

Каждая пара частиц взаимодействует независимо, т.е так, как если бы других частиц не было. $\bar{F} = \sum \bar{F}_i$



С помощью этого принципа можно находить гравитационные силы, действующие в $\forall$ заданной системе частиц.

$\bar{f}_{ij} = G\dfrac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \cdot \dfrac{\bar{r}_{ij}}{r_{ij}}$, $\bar{F} = \sum\limits_i \sum\limits_j \bar{f}_{ij}$



Пример: притяжение материальной точки к шару.

Однородный шар притягивает точку так, как если бы вся масса шара находилась в его центре.

$F = G\dfrac{Mm}{r^2}$

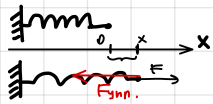
Сила упругости

Сила, препятствующая деформации упругих тел (пружины).

Упругим называется тело, восстанавливающее свою форму после прекращения действия силы.

Закон Гука. Сила упругости пропорциональна величине деформации упругого тела (верно при не слишком больших деформациях)

Коэффициент упругости пружины k. $F_{упр.} = -kx$, $[k] = Н/м$



Прибор, работающий на принципе зависимости F от x – **динамометр.**

Модуль Юнга. Из определенного материала делают образец ℓ, S. Прикладывают силу F и измеряют величину деформации $\Delta\ell$. При не больших деформациях $\varepsilon = \Delta\ell/\ell$ (относительная деформация) пропорциональна $\sigma = F/S$ (механическое напряжение). $\sigma = E\varepsilon$, где E – модуль Юнга. $[E] = Н/м^2 = Па = [\sigma]$

Сила трения

Сила, препятствующая относительному перемещению соприкасающихся тел.

Сухое – трение сухих поверхностей.

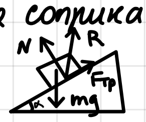
Трение покоя – в отсутствие относительного перемещения соприкасающихся тел.

$\bar{F}_{тр} = -\bar{F}$. Опыт показывает, что $F_{тр} \leq F_{max}$.

Сила нормального давления – N, составляющая силы взаимодействия соприкасающихся тел, перпендикулярная поверхности соприкосновения.

$F_{max} \sim N$

$F_{max} = \mu N$, $[\mu] = 1$



$mg + R = 0$

$\mu = tg\alpha$

μ – **коэффициент трения**

Сила реакции – сила, действующая на брусок, со стороны на которой он лежит (R).

Трение скольжения – трение при наличии относительного перемещения соприкасающихся тел. Опыт показывает, что сила трения скольжения ≈ равна максимальной силе трения покоя.

$F_{тр} = \mu N$, μ – **коэффициент трения скольжения**

Вязкое трение – трение, препятствующее движению тела в сплошной среде.

1) нет трения покоя 2) зависит от скорости

Опыт показывает, что при достаточно малой скорости движения тела $F_{тр} \sim v$

Электромагнитные силы.

Сила Лоренца $\bar{F} = q\bar{E} + q[\bar{v}, \bar{B}]$ – фундамент. физич. сила (заряд)

$\bar{F}_{эл} = q\bar{E}$ напряженность эл. поля, $\bar{F}_м = q[\bar{v}, \bar{B}]$ магнитная индукция

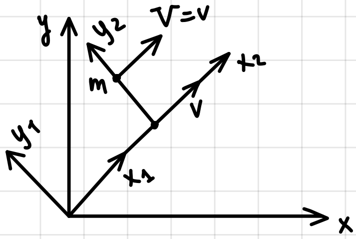
10. Релятивистское уравнение движения.

Уравнение, описывающее движение частиц с очень большой скоростью, близкой к c.

$\dot{\bar p} = \bar F = \frac{d\bar p}{dt}$, p – релятивистский импульс

$\bar p = \frac{m\bar v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, $\bar F = q\bar E + q[\bar v,\bar B]$ – сила Лоренца

Пример: на частицу массой m, движущейся со скоростью v действует сила F в направлении движения частицы. a – ?



$$\begin{array}{ccc} m\bar a_2 & = & \bar F_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar a_1 & & \bar F_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar a & & \bar F \end{array}$$

$\xrightarrow{m\ \bar v} x$ $\quad \dot p_x = F_x = F$, $p_x = \frac{m v_x}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}}$

$$\dot p_x = \frac{dp_x}{dt} = \frac{m\dot v_x}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}} + m v_x\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1\cdot\left(-\frac{1}{c^2}\right)2\dot v_x v_x}{(1-v_x^2/c^2)^{3/2}} = \frac{m\dot v_x}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}}\cdot\left(1+\frac{v_x^2/c^2}{1-v_x^2/c^2}\right)$$

$$\dot p_x = \frac{m\dot v_x}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}} = \frac{m\dot v_x}{\left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}} = F_x \longrightarrow a = \dot v_x = \frac{F_x}{m}\cdot\left(1-v_x^2/c^2\right)^{3/2}$$

11. Неинерциальные системы отсчёта.

Инерциальная СО – СО, относительно которой всякое тело бесконечно удаленное от других тел не испытывает ускорения.

Опыт показывает, что СО, связанная с поверхностью Земли является инерциальной, хотя бы приблизительно.

Рассмотрим две СО: инерциальная (S), неинерциальная (S').

S: $m\bar a = \bar F$, S': $\bar a'$ – ?

$m\bar a + m\bar a' - m\bar a' = \bar F$ или $m\bar a' = \bar F \overbrace{- m(\bar a - \bar a')}^{\bar F_{ин.}} = \bar F + \bar F_{ин.}$ ← сила инерции

m – масса м.т.
$\bar a$ – ускорение m. отн-но ИСО
$\bar a'$ – ускорение m. отн-но данной НИСО

Сила инерции – добавочная сила, действующая на мт в НИСО и определяемая формулой: $F_{ин.} = -m(\bar a - \bar a')$

$\bar a' = \bar a' + \bar a_0 - \omega^2\bar r'_\perp + 2[\bar\omega,\bar v'] \Rightarrow \bar a - \bar a' = \bar a_0 - \omega^2\bar r'_\perp + 2[\bar\omega,\bar v']$

$F_{ин.} = -m\bar a_0 + m\omega^2\bar r'_\perp - 2m[\bar\omega,\bar v'] = \bar F_п + \bar F_{цб} + \bar F_к$

Переносная сила инерции: $\bar F_п = -m\bar a_0$

Центробежная сила инерции: $\bar F_{цб} = m\omega^2\bar r'_\perp$

Кориолисова сила инерции: $\bar F_к = -2m[\bar\omega,\bar v']$

Особенности сил инерции:

1) силы инерции отличны от 0 (нуля) только для наблюдателя, связанного с НИСО;
2) нельзя указать тело, со стороны которого приложена сила инерции.

В этом смысле силы инерции не подчиняются 3ему закону Ньютона.

Примеры:

а) Невесомость – исчезновение веса тела, вызванное ускорением СО
б) Перегрузка – возрастание веса тела, вызванное ускорением СО
в) в механике силы инерции применяются в устройствах – центрифуга
г) маятник Фуко (кореолисовы силы)

12. Импульс частицы и системы частиц. Движение центра масс.

Импульс материальной точки – произведение массы точки на её скорость. $\bar{p} = m\bar{v}\ \left[\frac{кг\cdot м}{с}\right]$

Закон изменения импульса:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{a} = \bar{F} \Rightarrow \dot{\bar{p}} = \bar{F}$$

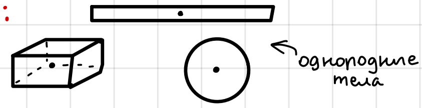
Скорость изменения $\bar{p}$ м.т. равна действующей на неё силе.

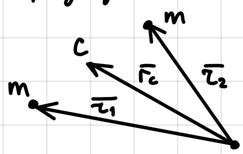
Импульс системы частиц – сумма импульсов отдельных частиц с-мы. $\bar{p} = \sum_i \bar{p}_i = \sum_i m_i \bar{v}_i$

Центр масс системы частиц – точка, радиус-вектор которой определяется формулой:

$$\bar{r}_c = \frac{1}{m}\cdot\sum_i m_i \bar{r}_i, \quad m = \sum_i m_i$$

Пример:





$$\bar{r}_c = \frac{m\bar{r}_1 + m\bar{r}_2}{2m} = \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}{2}$$

Скорость центра масс: $\bar{v}_c = \frac{d\bar{r}_c}{dt} = \frac{1}{m}\cdot\sum_i m_i\bar{v}_i \Rightarrow \bar{p} = \sum m_i\bar{v}_i = m\bar{v}_c$

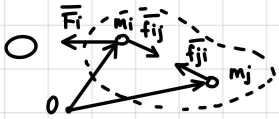
Ускорение центра масс: $\bar{a}_c = \frac{d\bar{v}_c}{dt} = \frac{1}{m}\cdot\sum_i m_i\bar{a}_i$

Импульс любой механической системы равен произведению массы системы на вектор скорости центра масс.

Закон движения центра масс

Внутренние силы – силы взаимодействия между телами данной системы.

Внешние силы – силы, действующие на тела системы со стороны тел, не входящих в эту с-му.



$\bar{f}_{ij} = -\bar{f}_{ji}$ (3ий з-н Ньютона) $\Rightarrow \bar{f}_{ij} + \bar{f}_{ji} = 0$

$\sum_{i,j} \bar{f}_{ij} = 0$, т.е для всей системы сумма всех внутренних сил $= 0$.

$\bar{F}_i$ – внешняя сила, действующая на частицу с номером i.

$m_i\bar{a}_i = \bar{F}_i + \sum_j \bar{f}_{ij} \Rightarrow$ просуммируем: $\sum_i m_i\bar{a}_i = \sum_i \bar{F}_i + \sum_{i,j} \bar{f}_{ij} = \sum_i \bar{F}_i \Rightarrow m\bar{a}_c = \bar{F}_{внеш.}$

Центр масс с-мы движется так, как если бы в этой точке была сосредоточена вся масса системы и к ней были бы приложены все внешние силы.

13. Закон сохранения импульса.

Закон изменения импульса системы

$\bar{p} = \sum m_i\bar{v}_i$, $\dot{\bar{p}} = \frac{d\bar{p}}{dt} = \sum m_i\bar{a}_i = \bar{F}_{внеш.}$ $\left(\bar{a}_c = \frac{1}{m}\cdot\sum m_i\bar{a}_i,\ m\bar{a}_c = \bar{F}_{внеш.}\right) \Rightarrow \dot{\bar{p}} = \bar{F}_{внеш.}$

Закон сохранения импульса (ЗСИ)

Скорость изменения импульса мех. с-мы равна сумме F внешних сил.

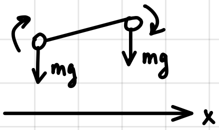
Если же сумма внешних сил равна 0 (нулю), то импульс мех. с-мы сохраняется.

Если $\bar{F}_{внеш.} = 0$, то $\bar{p} = \sum m_i\bar{v}_i = const$ – ЗСИ.

Закон сохранения импульса относительно оси

Если существует такая ось, в проекции на которую сумма внешних сил равна нулю, то в направлении этой оси импульс системы сохраняется.

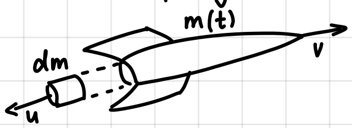
Если $F^{(x)}_{внеш.} = 0 \Rightarrow p_x = \sum_i m_i v_{ix} = const$



$$mv_{1x} + mv_{2x} = const$$

14. Реактивное движение

Реактивное движение – движение ракеты/самолета, обусловленное выбросом реактивной струи.



Реактивная сила:

Ракета разгоняется под действием реактивной силы.
(пренебрегаем действием внешних сил) ($\bar c$ - скорость выброса относительно ракеты)

$m\bar v = (m-dm)(\bar v + d\bar v) + \bar u\,dm$, $\bar u = \bar c + \bar v$

$\cancel{m\bar v} = \cancel{m\bar v} - m\,d\bar v - \cancel{\bar v\,dm} - dm\,d\bar v + \cancel{\bar v\,dm} + \bar c\,dm \longrightarrow m\,d\bar v + \bar c\,dm = 0 \longrightarrow m\,d\bar v = -\bar c\,dm$

$m\,d\bar v/dt = -\bar c\,dm/dt \longrightarrow m\,d\bar v/dt = -\mu\bar c$, где $\mu = dm/dt$ – скорость расхода массы.

$m\frac{d\bar v}{dt} = \bar F$ (2ой закон Ньютона) $\Rightarrow \boxed{F_p = -\mu\bar c}$

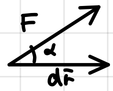
Стартовая масса ракеты:

Масса ракеты уменьшается за счет выбросов: $m = m(t) = m_0 - \mu t$

$(m_0 - \mu t)\,dv/dt = \mu c \longrightarrow dv/c = \mu dt/(m_0 - \mu t)$

$\int_0^v dv/c = \int_0^t \mu dt/(m_0 - \mu t) = -\int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} = -\ln m/m_0 = \ln m_0/m = V/c \Rightarrow \boxed{m_0 = m e^{V/c}}$

15. Работа и потенциальная энергия.

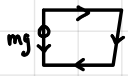


Элементарная работа – скалярное произведение силы на бесконечно малое перемещение точки приложения силы. $dA = \bar F d\bar r$, $dA = F\,dr\cos\alpha$

Работа – сумма элементарных работ. $A = \int dA$, $[A]$ = Дж = Н·м

1 Дж – работа, которую совершает сила в 1Н при перемещении на 1м в направлении действия силы.

Потенциальная сила – сила, работа которой равна 0 при перемещении точки приложения силы по любому замкнутому контуру. $\oint dA = 0$



Примеры потенциальных сил:
1) сила тяжести
2) сила упругости
3) сила Кулона (взаимод. эл.зарядов)

Примеры непотенциальных сил:
1) сила трения
2) мышечная сила

Элементарная потенциальная энергия – элементарная работа потенциальной силы, взятая со знаком "–". $d\Pi = -dA_п$

Потенциальная энергия – сумма элементарных потенц. энергий. $\Pi = \int d\Pi$ [Дж] $\Pi(\bar r) = -\int_{\bar r_0}^{\bar r} \bar F d\bar r$

Выражение потенциальной силы через потенциальную энергию:

$\Pi = \Pi(x,y,z)$: $d\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Pi}{\partial z}dz = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) = -d\bar A = -\bar F d\bar r$

$F_x = -\frac{\partial\Pi}{\partial x}$, $F_y = -\frac{\partial\Pi}{\partial y}$, $F_z = -\frac{\partial\Pi}{\partial z}$

$\bar F = \bar i F_x + \bar j F_y + \bar k F_z = -\left(\bar i\frac{\partial\Pi}{\partial x} + \bar j\frac{\partial\Pi}{\partial y} + \bar k\frac{\partial\Pi}{\partial z}\right) = -\mathrm{grad}\,\Pi \Rightarrow \boxed{\bar F = -\mathrm{grad}\,\bar\Pi}$

Потенциальная энергия системы частиц – сумма потенциальных энергий отдельных частиц системы. $\Pi = \sum \Pi_i$

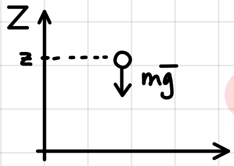
Потенциальная энергия системы частиц определим как работу, которую нужно совершить, чтобы из некоторого другого положения (принятого за СО) привести систему в данное положение.

16. Потенциальная энергия механических систем.

1° Материальная точка в поле сил тяжести.

$d\Pi = -dA = -m\bar{g}\,d\bar{r} = mg\,dz$ (z – высота точки над пов-тью Земли)

$\Pi = \int d\Pi = \int_0^z mg\,dz = mgz$

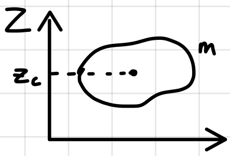


$\boxed{\Pi = mgz}$

2° Потенциальная энергия тела в поле сил тяготения.

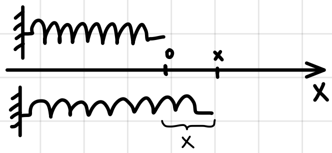
$\Pi = \sum_i \Pi_i = \sum_i m_i g z_i = g\sum_i m_i z_i = mgz_c$ (z - высота ц.м. отн-но пов-ти З.)

Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести такова, как если бы вся масса тела была сосредоточена в центре масс.



$\boxed{\Pi = mgz_c}$

3° Потенциальная энергия пружины.



$F_x = -kx$ (закон Гука)

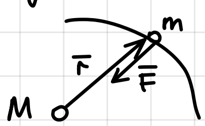
$d\Pi = -dA = -\bar{F}d\bar{r} = -F_x dx = kx\,dx$

$\Pi = \int d\Pi = k\int_0^x x\,dx = \frac{kx^2}{2}$

$\boxed{\Pi = \frac{kx^2}{2}}$

4° Потенциальная энергия м.т. в центральном силовом поле.

Поле центральной силы – поле сил, направленной всегда в сторону одной и той же точки, называемой силовым центром. $\bar{F} = -\frac{\bar{r}}{r}F$, где $F = G\frac{Mm}{r^2}$

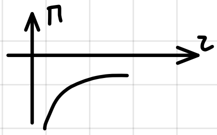


$d\bar{r} = r\,dr$

$d\Pi = -\bar{F}d\bar{r} = \frac{F}{r}\bar{r}\,d\bar{r}$, $d\bar{r} = x\,dx + y\,dy + z\,dz = \frac{1}{2}d(x^2+y^2+z^2) = \frac{1}{2}d(r^2) = r\,dr$

$\Rightarrow d\Pi = F\,dr = G\frac{Mm}{r^2}dr$

$\Pi = \int d\Pi = GMm\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2} = -GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$



Положим $r_0 = \infty$: $\boxed{\Pi = -GMm\cdot\frac{1}{r}}$

17. Кинетическая энергия

Кинетическая энергия материальной точки – величина $K = \frac{mv^2}{2}$ $\left[\frac{кг\cdot м^2}{с^2}\right] = [Дж]$

Закон изменения кинетической энергии

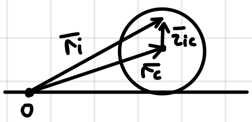
$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} \rightarrow m\frac{d\bar{r}}{dt}\cdot d\bar{v} = \bar{F}d\bar{r} = dA = m\bar{v}\,d\bar{v} = mv\,dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \boxed{dK = dA}$

Приращение кинетической энергии м.т. равно элементарной работе действующих на неё сил.

Кинетическая энергия системы частиц – сумма кинетических энергий отдельных частиц системы.

$K = \sum_i K_i = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$

Вычислим:



$\bar{r}_i = \bar{r}_c + \bar{r}_{ic}$ – дифференцируем по времени

$\bar{v}_i = \bar{v}_c + \bar{v}_{ic}$ (правило сложения V Галилея)

$\bar{r}_c = \frac{1}{m}\cdot\sum_i m_i\bar{r}_i$

$\bar{v}_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i\bar{v}_i$

$K = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i\bar{v}_i\bar{v}_i = \frac{1}{2}\sum m_i(\bar{v}_c + \bar{v}_{ic}, \bar{v}_c + \bar{v}_{ic}) = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_{ic}^2 + \bar{v}_c\sum_i m_i\bar{v}_{ic}$

$\sum m_i\bar{v}_{ic} = \sum m_i(\bar{v}_i - \bar{v}_c) = m\bar{v}_c - m\bar{v}_c = 0 \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}\sum m_i v_{ic}^2}$

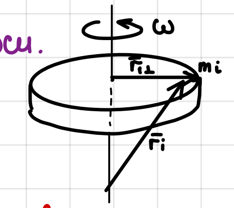
$\boxed{K = K_c + K_{oc}}$, где $K_c = \frac{1}{2}mv_c^2$ (кин. эн. связанная с движением ц.м.), $K_{oc} = \frac{1}{2}\sum m_i v_{ic}^2$ (движение точек СО отн-но ц.м.)

18. Кинетическая энергия твёрдого тела.

1° Поступательное движение

$\bar{v}_i = \bar{v}$ $\qquad K = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m v^2$

2° Вращение вокруг неподвижной оси.



$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$, $v_i = \omega r_{i\perp}$

$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i \omega^2 r_{i\perp}^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_i m_i r_{i\perp}^2$

$K = \frac{1}{2} I\omega^2$, где $I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$

Момент инерции тела относительно оси вращения – $I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$, некая характеристика тела по отношению к данной оси вращения $[\text{кг}\cdot\text{м}^2]$

3° Плоское движение твёрдого тела

$K = K_c + K_{oc} = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$ – теорема Кёнига

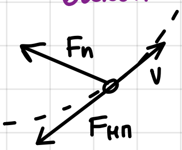
Энергия движения центра + энергия вращения тела вокруг оси

19. Закон сохранения энергии в механике

Полная механическая энергия – сумма потенциальной и кинетической энергий с-мы.

$E = \Pi + K$

Закон изменения полной энергии



$\bar{F} = \bar{F}_п + \bar{F}_{нп}$ $\qquad dK = dA$

$F_п$ - потенциальная $\qquad dA = \bar{F}d\bar{r} = \bar{F}_п d\bar{r} + \bar{F}_{нп} d\bar{r} = dA_п + dA_{нп}$

$F_{нп}$ - непотенциальная $\qquad dA_п = -d\Pi \Rightarrow dK = -d\Pi + dA_{нп}$

$$dE = d(K+\Pi) = dA_{нп}$$

Изменение полной механической энергии – работа действующих на неё непотенц. сил.

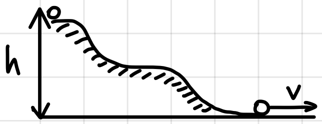
Закон сохранения энергии в механике Ньютона

Приращение полной энергии системы равно работе непотенциальных сил.

Если же $A_{нп} = 0$, то полная механическая энергия с-мы сохраняется.

$E = K + \Pi = const$

Пример:



$mgh = \frac{mv^2}{2}$

$v = \sqrt{2gh}$

20. Импульс и энергия в теории относительности.

Релятевистский импульс частицы — величина, определяемая: $\bar{p} = \dfrac{m\bar{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

Уточнение понятия массы: измерение массы следует проводить при скорости тела, значительно меньшей скорости света.

Релятевистская энергия частицы — величина, определяемая: $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

Релятевистский импульс системы частиц — сумма релятевистских импульсов частиц системы: $\bar{p} = \sum\limits_i \dfrac{m_i\bar{v}_i}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}}$

Релятевистская энергия системы частиц — сумма релятевистских энергий отдельных частиц системы: $E = \dfrac{m_i c^2}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}}$

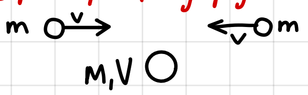
Закон сохранения импульса в теории относительности

Если сумма внешних сил равна нулю, то релятевистский импульс и релятевистская энергия системы сохраняются.

Если $\bar{F}_{внеш} = 0$, то $\bar{p} = \sum \dfrac{m_1\bar{v}_1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} = const$, $E = \sum \dfrac{m_i c^2}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}} = const$

Следствие закона сохранения импульса и принципа относительности

Пример: (неупругий удар)



$$\begin{cases} \dfrac{m\bar{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \dfrac{m\bar{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dfrac{M\bar{V}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dfrac{Mc^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ V = 0 \end{cases} \Rightarrow M = \dfrac{2m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} > 2m \quad !$$

Энергия покоя $E_0 = mc^2$

Таким образом теория относительности предсказывает, что возможны взаимные превращения массы и энергии.

Фотон: $\bar{p} = \dfrac{m\bar{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$E\bar{v} = \bar{p}c^2$

$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$

$\exists m = 0$: $E = pc$, $v = c$

Теория относительности предсказывает существование частиц, которые движутся со скоростью c и имеют $E = pc$ — **ФОТОН.**

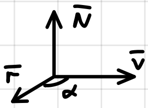
Световое давление. При поглощении света на тело действует сила светового давления.

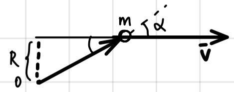
$F = \dot{p}$, $p = E/c \rightarrow F = \dot{E}/c = P/c$, где P – мощность света

$F = \dfrac{P}{c}$

21. Момент импульса частицы и системы частиц. Момент силы.

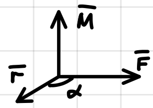
Момент импульса частицы – векторное произведение радиус-вектора частицы на её импульс. $\bar N = [\bar r, m\bar v]$ $[\text{м}\cdot\text{кг}\cdot \text{м}/\text{с}]$





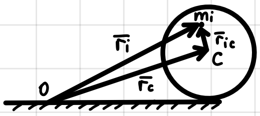
$N = rmv\sin\alpha \rightarrow N = Rmv$, где $R = r\sin\alpha$

Момент силы – векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы на вектор силы. $\bar M = [\bar r, \bar F]$ $[\text{Н}\cdot\text{м}]$



$M = rF\sin\alpha \rightarrow M = RF$, где $R = r\sin\alpha$ – плечо силы

Момент импульса системы – сумма моментов импульса отдельных частиц системы.
$\bar N = \sum_i \bar N_i = \sum_i [\bar r_i, m_i \bar v_i]$.



$\bar r_c = \frac{1}{m}\cdot\sum m_i \bar r_i$, $\bar v_c = \frac{1}{m}\cdot \sum m_i \bar v_i$

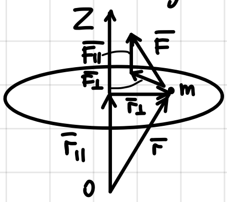
$\bar r_i = \bar r_c + \bar r_{ic}$, $\bar v_i = \bar v_c + \bar v_{ic}$

$\Rightarrow \bar N = \sum m_i[\bar r_c + \bar r_{ic}, \bar v_c + \bar v_{ic}] = [r_c, m\bar v_c] + \sum m_i [\bar r_{ic}, \bar v_{ic}] + [\bar r_c, \sum m_i \bar v_{ic}] + [\sum m_i \bar r_{ic}, \bar v_c]$

$\bar N = [\bar r_c, m\bar v_c] + \sum m_i [\bar r_{ic}, \bar v_{ic}]$, т.к. $\sum m_i \bar v_{ic} = \sum m_i(\bar v_i - \bar v_c) = m\bar v_c - m\bar v_c = 0$, $\sum m_i \bar r_{ic} = \sum m_i(\bar r_i - \bar r_c) = m\bar r_c - m\bar r_c = 0$

$\bar N = \bar N_c + \bar N_{oc}$, где $\bar N_c = [\bar r_c, m\bar v_c]$, $\bar N_{oc} = \sum m_i [\bar r_{ic}, \bar v_{ic}]$

Момент относительно оси – проекция вектора момента на эту ось. Верно как для момента импульса, так и для момента сил.



$\bar M = [\bar r, \bar F] = [\bar r_\parallel + \bar r_\perp, \bar F_\parallel + \bar F_\perp]$

$\bar M = [\bar r_\parallel, \bar F_\parallel] + [\bar r_\parallel, \bar F_\perp] + [\bar r_\perp, \bar F_\parallel] + [\bar r_\perp, \bar F_\perp]$

$[\bar r_\parallel, \bar F_\parallel] = 0$ (как векторное произведение коллинеарных векторов)

$[\bar r_\parallel, \bar F_\perp] + [\bar r_\perp, \bar F_\parallel] = \bar M_\perp$ (перпендикулярны оси z)

$[\bar r_\perp, \bar F_\perp] = \bar M_\parallel$ (параллельно оси z)

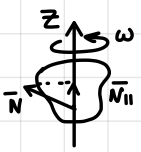
Составляющая момента силы, параллельная некоторой оси, равна векторному произведению компонент радиуса-вектора точки приложения силы и вектора силы, перпендикулярных данной оси.

Аналогично $\bar N_\parallel = [\bar r_\perp, m\bar v_\perp]$

22. Момент импульса твёрдого тела.

1° Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

$* \; [a,[b,c]] = \bar b(\bar a, \bar c) - \bar c(\bar a, \bar b)$



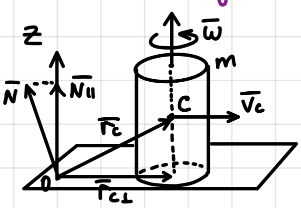
$\bar N = \sum [\bar r_i, m_i \bar v_i]$

$\bar N_\parallel = \sum [\bar r_{i\perp}, m_i \bar v_{i\perp}]$, где $\bar v_i = \bar v_{i\perp} = [\bar\omega, \bar r_i] = [\bar\omega, \bar r_{i\perp}]$

$\bar N_\parallel = \sum m_i [\bar r_{i\perp}, [\bar\omega, \bar r_{i\perp}]] = \sum m_i \cdot \left(\bar\omega r_{i\perp}^2 - \bar r_{i\perp}\cdot\underbrace{(\bar r_{i\perp}, \bar\omega)}_{=0}\right) = \sum \bar\omega \sum m_i r_{i\perp}^2$

$\bar N_\parallel = I\bar\omega$, где $I = \sum m_i r_{i\perp}^2$

2° Плоское движение твердого тела



Рассмотрим цилиндр, скатывающийся по наклонной плоскости.

$\bar N = \bar N_c + \bar N_{oc}$

$\bar N_\parallel = \bar N_{c\parallel} + \bar N_{oc\parallel}$, $\bar N_{oc\parallel} = I\bar\omega$, $\bar N_{c\parallel} = [\bar r_{c\perp}, m\bar v_c]$

$\Rightarrow \bar N_\parallel = [\bar r_{c\perp}, m\bar v_c] + I\bar\omega$

23. Теорема моментов. Закон сохранения момента импульса.

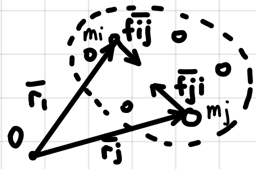
Теорема моментов для материальной точки

$\bar N = [\bar r, m\bar v]$

$\dot{\bar N} = [\dot{\bar r}, m\bar v] + [\bar r, m\dot{\bar v}] = [\bar v, m\bar v] + [\bar r, \bar F] = [\bar r, \bar F] = \bar M$ $\qquad$ $\dot{\bar N} = \bar M$

Скорость изменения момента импульса частицы равна моменту действующей на неё сил.

Теорема моментов для системы частиц



$\bar N = \sum_i [\bar r_i, m_i \bar v_i]$

$\dot{\bar N} = \sum_i [\dot{\bar r}_i, m_i \bar v_i] + \sum_i [\bar r_i, m_i \dot{\bar v}_i]$, $\quad [\dot{\bar r}_i, m_i\bar v_i] = [\bar v_i, m_i \bar v_i] = 0$

$m_i \dot{\bar v}_i = m_i \bar a_i = \bar F_i + \sum_j \bar f_{ij}$

$\Rightarrow \dot{\bar N} = \sum_i [r_i, F_i + \sum_j f_{ij}] = \sum_i [\bar r_i, \bar F_i] + \sum_i [r_i, \sum_j f_{ij}] = \bar M_{внеш.} + \bar M_{внутр.}$

Покажем, что суммарный момент внутренних сил всегда равен нулю ($\bar M_{внутр.} = 0$)

$\bar M_{ij} = [\bar r_i, \bar f_{ij}] - [\bar r_j, \bar f_{ji}]$

$\bar f_{ij} = -\bar f_{ji}$ (3ий закон Ньютона) $\Rightarrow \bar M_{ij} = [\bar r_i, \bar f_{ij}] - [\bar r_j, \bar f_{ij}] = [\bar r_i - \bar r_j, \bar f_{ij}] = 0$

$\Rightarrow \dot{\bar N} = \bar M_{внеш}$

Закон сохранения момента импульса

Если сумма моментов внешних сил равна 0, то момент импульса мех. с-мы сохр.

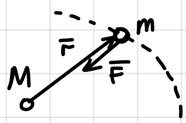
$\bar M_{внеш} = 0 \Rightarrow \bar N = \sum [\bar r_i, m_i \bar v_i] = const$

Закон сохранения момента импульса относительно оси

Если существует ось, относительно которой $\bar M_{внеш} = 0$, то относительно этой оси момент импульса системы сохраняется.

Если $M_z = 0 \Rightarrow N_z = const$

24. Материальная точка в центральном поле.



Сохранение момента импульса

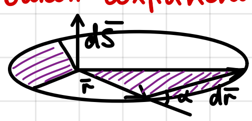
$\bar M = (\bar r, \bar F) = 0 \Rightarrow N = [\bar r, m\bar v] = const$

перпендикулярно вектору момента импульса

Отсюда следует, что движение точки в центральном поле – плоское

Сохранение энергии: Поле тяготения – потенциальное силовое поле $\Rightarrow E = K + \Pi = const$

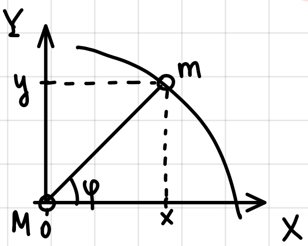
Закон сохранения секторной скорости:



$d\bar S = \frac{1}{2}[\bar r, d\bar r]$ – вектор секторной площади

$dS = r\,dr \sin\alpha$

$\bar\sigma = \frac{d\bar S}{dt} = \frac{1}{2}[\bar r, \frac{d\bar r}{dt}] = \frac{1}{2}[\bar r, \bar v] = \frac{1}{2m}[\bar r, m\bar v] = \frac{\bar N}{2m} = const$ – секторная скорость



$E = K + \Pi$, $\quad K = \frac{mV^2}{2}$, $\quad \Pi = -G\frac{Mm}{r} = -\frac{A}{r}$

$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot x = \dot r\cos\varphi - r\dot\varphi\sin\varphi \\ \dot y = \dot r\sin\varphi + r\dot\varphi\cos\varphi \end{cases} \rightarrow v^2 = \dot x^2 + \dot y^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2$

$\bar N = [\bar r, m\bar v] = m\begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ x & y & 0 \\ \dot x & \dot y & 0 \end{vmatrix} = m\bar k\cdot(x\dot y - y\dot x) = \bar k m r^2\dot\varphi$

$\begin{cases} N = mr^2\dot\varphi = const \\ E = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - \frac{A}{r} = const \end{cases}$

Уравнения сохранения энергии и момента импульса в полярных координатах

25. Законы Кеплера

законы движения планет солнечной системы

Первый закон Кеплера

Планеты солнечной системы движутся по эллипсам, в общем фокусе которых – Солнце

Второй закон Кеплера

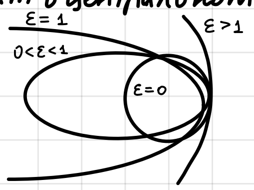
За равные промежутки времени радиус-вектор планеты очерчивает равные площади

Третий закон Кеплера

Квадраты периодов обращений планет относятся как кубы больших полуосей их элептических орбит

Найдем вид траектории м.т в центральном силовом поле: $r = r(\varphi)$

$$r(\varphi)=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$



$\varepsilon=0$: окружность

$0<\varepsilon<1$: эллипс

$\varepsilon=1$: парабола

$\varepsilon>1$: гипербола

$$\begin{cases} N = mr^2\dot\varphi \\ E=\frac{m}{2}(\dot r^2+r^2\dot\varphi^2)-\frac{A}{r}\end{cases} \to \begin{cases} \dot\varphi=\frac{N}{mr^2} \\ (\dot r^2+r^2\dot\varphi^2)=\left(E+\frac{A}{r}\right)\frac{2}{m}\end{cases} \to \begin{cases} \dot\varphi=\frac{N}{mr^2}=\frac{d\varphi}{dt} \\ \dot r=\pm\sqrt{\frac{2E}{m}+\frac{2A}{mr}-\frac{N^2}{m^2r^2}}=\frac{dr}{dt}\end{cases}$$

$$\pm\frac{dr}{d\varphi}=\frac{mr^2}{N}\sqrt{\frac{2E}{m}+\frac{2A}{mr}-\frac{N^2}{m^2r^2}}=r^2\sqrt{\frac{2mE}{N^2}+\frac{2mA}{N^2r}-\frac{1}{r^2}} \to \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{N^2}+\frac{2mA}{N^2r}-\frac{1}{r^2}}}=\pm d\varphi$$

$$] \; s=\frac{1}{r},\; ds=-\frac{1}{r^2}dr \Rightarrow \frac{ds}{\sqrt{\frac{2mE}{N^2}+\frac{2mAs}{N^2}-s^2}}=\pm d\varphi$$

$$\frac{2mE}{N^2}+\frac{2mA}{N^2}s-s^2=-\left(s-\frac{mA}{N^2}\right)^2+\frac{2mE}{N^2}+\frac{m^2A^2}{N^4}=a^2-x^2,\ \text{где}\ a=\sqrt{\frac{2mE}{N^2}+\frac{m^2A^2}{N^4}},\ x=s-\frac{mA}{N^2}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\pm d\varphi \to \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)=\pm\varphi+C$$

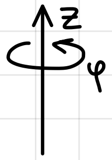
$] \; C=\frac{\pi}{2}$ и φ со знаком "–": $\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{\pi}{2}-\varphi$

$$\frac{x}{a}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\varphi \to x=a\cos\varphi$$

$$x=s-\frac{mA}{N^2}=\frac{1}{r}-\frac{mA}{N^2} \to \frac{1}{r}-\frac{mA}{N^2}=a\cos\varphi \to r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi},\ \text{где}\ p=\frac{N^2}{mA},\ \varepsilon=\frac{N^2a}{mA}=\frac{N^2}{mA}\sqrt{\frac{2mE}{N^2}+\frac{m^2A^2}{N^4}}=\sqrt{1+\frac{2N^2E}{mA^2}}$$

26. Плоское движение твёрдого тела.

Описывается двумя уравнениями: движение центра масс и вращение
$$\begin{cases} m\bar a_c = \bar F_{внеш} \\ \dot{\bar N} = \bar M \end{cases}$$



$N_z = I\omega_z$

$\omega_z = \dot\varphi$

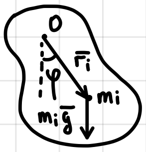
$\dot N_z = I\dot\omega_z = I\ddot\varphi$

Угловое ускорение вращения тела:

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad \varepsilon_z = \dot\omega_z = \ddot\varphi \quad [рад/с^2]$$

$\boxed{I\varepsilon_z = M_z}$ или $I\ddot\varphi = M_z$ – сумма моментов внешних сил, действующих на него

Уравнение колебания физического маятника



$$\bar M = \sum \bar M_i = \sum[\bar r_i, m_i\bar g] = \sum[m_i\bar r_i, \bar g] = [\sum m_i\bar r_i, \bar g] = [m\bar r_c, \bar g] = [\bar r_c, m\bar g]$$

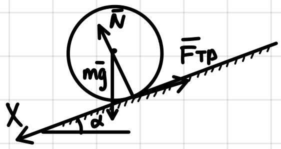
Суммарный момент сил тяжести таков, как если бы вся масса тела была в его центре

$\bar M_\parallel = [\bar r_\perp, m\bar g]$, $M_\parallel = mgl\sin\varphi$ (l – расстояние от оси вращения маятника до её центра масс)

$$M_z = -M_\parallel = -mgl\sin\varphi = I\ddot\varphi = I\varepsilon_z \Rightarrow \boxed{\ddot\varphi + \frac{mgl}{I}\sin\varphi = 0}$$

Это уравнение применимо в 2 случаях:
1) для $\forall$ неподвижной оси вращения
2) для движущейся оси, проходящей через центр масс тела

Пример: скатывание цилиндра по наклонной плоскости (без проскальзывания)



$$\begin{cases} m\ddot x = mg\sin\alpha - F_{тр} \\ I\varepsilon_z = M_z = R\cdot F_{тр} \\ x = R\varphi \end{cases} \to \begin{cases} m\ddot x = mg\sin\alpha - I\ddot x/R^2 \\ F_{тр} = I\varepsilon_z/R = I\ddot x/R^2 \\ \ddot x = R\ddot\varphi = R\varepsilon_\omega \end{cases} \to \ddot x = \frac{g\cdot\sin\alpha}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

Сводка формул, описывающих плоское движение

Уравнение движения центра масс: $m\bar a_c = \bar F_{внеш}$

Уравнение вращения тела: $I\varepsilon_z = M_z$

Угловое ускорение вращения тела относительно данной оси: $\varepsilon_z = \dot\omega_z = d\omega_z/dt$

Угловая скорость вращения тела относительно данной оси: $\omega_z = \dot\varphi = d\varphi/dt$

Импульс тела: $\bar p = m\bar v_c$

Момент импульса тела (вдоль оси вращения) $\bar N_\parallel = [\bar r_{c\perp}, m\bar v_c] + I\bar\omega$

Кинетическая энергия тела: $K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$

вращение относительно оси через центр масс

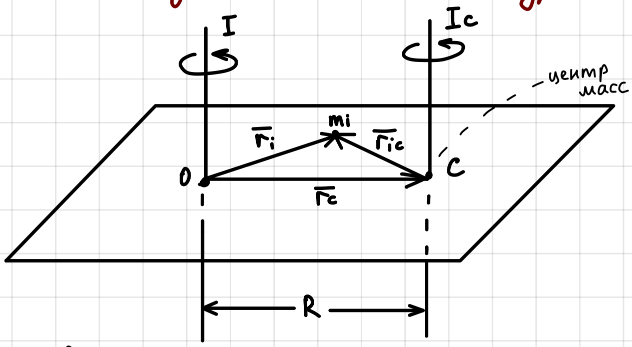
Момент импульса тела: $N_z = I\omega_z$

Кинетическая энергия тела: $K = \frac{I\omega^2}{2}$

вращение относительно неподвижной оси

27. Момент инерции твёрдого тела.

Теорема Гюйгенса-Штейнера: момент инерции тела относительно произвольной оси равен моменту инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела, параллельно данной, плюс масса тела, умноженная на квадрат расстояния между осями. $I = I_c + mR^2$



$\bar r_i = \bar r_c + \bar r_{ic} \to \bar r_{i\perp} = \bar r_{c\perp} + \bar r_{ic\perp}$

$\Rightarrow r_{i\perp}^2 = \bar r_{i\perp}\cdot\bar r_{i\perp} = (\bar r_{c\perp}+\bar r_{ic\perp}, \bar r_{c\perp}+\bar r_{ic\perp}) = r_{c\perp}^2 + 2\bar r_{ic\perp}\bar r_{c\perp} + r_{ic\perp}^2$

где $r_{c\perp} = R$

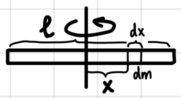
$\Rightarrow I = \sum m_i r_{i\perp}^2 = mR^2 + 2\bar r_{c\perp}\sum m_i \bar r_{ic\perp} + \sum m_i r_{ic\perp}^2$

$\sum m_i r_{ic\perp}^2 = I_c$, $\sum m_i \bar r_{ic} = \sum m_i(\bar r_i - \bar r_c) = \sum m_i \bar r_i - m\bar r_c = 0$

$\Rightarrow I = I_c + mR^2$

обруч: $I_c = mR^2$ (R-радиус), $I = I_c + mR^2 = 2mR^2$

стержень:

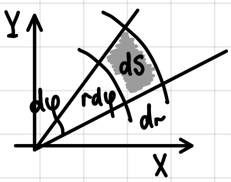


$dm = \frac{m}{\ell}\cdot dx$ – стержень однородный

$dI = x^2 dm = \frac{m}{\ell}x^2 dx$ – элементарный момент инерции

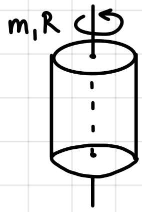
$I_c = \int dI = \frac{m}{\ell}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} x^2 dx = \frac{m\ell^2}{12} \to I = I_c + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{3}$

диск:



$dS = r\,dr\,d\varphi$, $dm = \frac{m}{S}dS$ где $S = \pi R^2$

$dI = r^2 dm = \frac{m}{S}r^2 r\,dr\,d\varphi \to I = \int dI = \frac{m}{S}\cdot\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{m}{S}2\pi\frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$

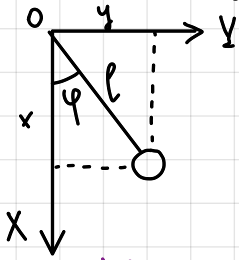


Момент инерции не зависит от высоты цилиндра (важна только удаленность от оси вращения)

шар: $I = \frac{2}{5}mR^2$

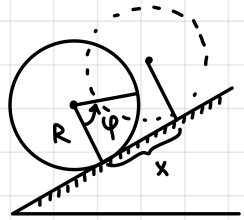
28. Системы со связями. Степени свободы. Обобщённые координаты.

Связи — не вытекающие из уравнений движения ограничения на координаты, скорости, ускорения точек механической системы.



$x^2+y^2=\ell^2$ — ограничение
$x\dot{x}+y\dot{y}=0$ на координаты
$x\ddot{x}+y\ddot{y}+(\dot{x})^2+(\dot{y})^2=0$ для мат. маятника

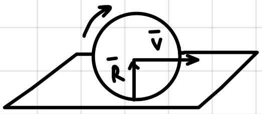
$x=R\varphi$



1) **Заданные силы** — известные постоянные силы или известные ф-ии координат частиц; ($F_{тяж}$, $F_{Арх}$, $F_{упр}$)

2) **Силы реакции** — силы, с которыми тела, реализующие связи, действуют на тела системы; (T, P, $F_{тр}$)

Голономные связи — связи, которые сводятся к ограничениям только на координаты тел.
Примеры: плоский математический маятник, качение цилиндра без проскальзывания.
Пример не голономной связи: качение шара по плоскости без проскальзывания



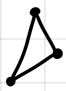
$\bar{v}=[\bar{\omega},\bar{R}]=\frac{d\bar{r}}{dt}$, $d\bar{r}=[\bar{\omega},\bar{R}]dt$
Существует связь скоростей, но нет связи координат.

Стационарные связи — связи, уравнения которых не содержат времени в явном виде.
Примеры: обычный математический маятник, качение цилиндра без проскальзывания.
Пример не стационарной связи: маятник, длина нити которого меняется во времени по заданному закону $x^2+y^2=\ell^2(t)$.

Число степеней свободы — число независимых координат, полностью определяющих положение системы в пространстве. Обозначим буквой S.

Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек, k — число связей (т.е подчиняется k ур-иям связи), у каждой точки 3 независ. координаты.

$S=3N-k$

Примеры: 1) • $S=3$ 2) • • $S=6$ 3) •—• ℓ $S=5$ $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=\ell^2$ 4)  $S=6$

У твёрдого тела 6 степеней свободы. Положение 3ёх точек, не лежащих на одной прямой, определяет положение остальных точек тела ⇒ S тела совпадает с S треугольника.

Обобщенные координаты — любые S координат, определяющих положение системы в пространстве. $q_1,\dots,q_S$ $\{q\}$ — набор обобщенных координат
Обобщенные скорости — производные обобщенных координат по времени. $\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_S$ $\{\dot{q}\}$

Свойства обобщенных координат:
1) Радиус-векторы точек системы являются однозначными ф-иями набора обобщенных координат. $\bar{r}_\ell=\bar{r}_\ell(q_1,\dots,q_S;t)$ — радиус-вектор точки
2) Обобщенные координаты обращают в тождество ур-ие связи
Пример: $x=\ell\cos\varphi$, $y=\ell\sin\varphi$, $x^2+y^2=\ell^2\equiv\ell^2$

29. Виртуальные перемещения. Виртуальная работа. Идеальные связи.

Виртуальное перемещение – бесконечно малое перемещение точки, допускаемое связями в данный фиксируемый момент времени.

$\bar{r}_l = \bar{r}_l(q_1, ..., q_s; t)$. Возьмем дифференциал при фикс. t: $\delta \bar{r}_l = \sum\limits_{j=1}^{s} \frac{\partial r_l}{\partial q_j} \delta q_j$

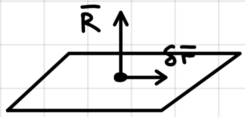
Виртуальная работа – работа сил на виртуальном перемещении: $\delta A = F \delta \bar{r}$

Идеальная связь – связь, для которой виртуальная работа сил реакции равна нулю.

$\delta A_R = \sum\limits_{l=1}^{N} R_l \delta r_l = 0$ (R_l – сила реакции, действ. на точку)

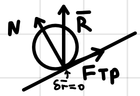
Примеры:

1) Идеально гладкая плоскость:



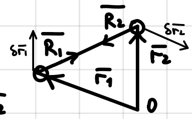
$\delta A_R = \bar{R}\delta\bar{r} = 0$ (нет сил трения $\Rightarrow$ нет горизонтальной силы реакции)

2) Качение без проскальзывания



$\delta\bar{r} = 0$, $\delta A_R = \bar{R}\delta\bar{r} = 0$

3) Невесомый жесткий стержень



$\delta A_R = \bar{R}_1\delta\bar{r}_1 + \bar{R}_2\delta\bar{r}_2$, $\bar{R}_1 = -\bar{R}_2$

$\Rightarrow \delta A_R = \bar{R}_1\delta\bar{r}_1 - \bar{R}_1\delta\bar{r}_2 = (R_1, \delta\bar{r}_1 - \delta\bar{r}_2) = \bar{R}_1, \delta(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) = R_1\delta\bar{r}$, где $\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$ $\quad R_1 = \alpha\bar{r}$ (сонаправл.)

$\Rightarrow \delta A_R = \bar{R}_1\delta\bar{r} = \alpha\bar{r}\delta\bar{r} = \frac{1}{2}\alpha\delta(r^2) = \frac{1}{2}\alpha\delta(l^2)$, где $l = const$ – длина стержня $\Rightarrow \delta A_R = 0$

30. Уравнения Лагранжа. Обобщённые силы

Рассмотрим систему с идеальными голономными связями.

Уравнение движения для отдельной точки системы: $m_l \ddot{\bar r}_l = \bar F_l + \bar R_l$ ($\bar F_l$ – заданные силы, $\bar R_l$ – силы реакции)

Исключим силы реакции (скалярно умножим на вектор виртуального перемещения и просуммируем по всем точкам системы):

$$\sum_{l=1}^{N}(m_l \ddot{\bar r}_l - \bar F_l)\,\delta \bar r_l = 0$$ – Уравнение Даламбера-Лагранжа

Переход к обобщенным координатам:

- $\sum\limits_{l=1}^{N}(m_l\ddot{\bar r}_l - \bar F_l)\cdot \sum\limits_{j=1}^{s}\frac{\partial \bar r_l}{\partial q_j}\,\delta q_j = 0 \longrightarrow \sum\limits_{j=1}^{s}\delta q_j \cdot \sum\limits_{l=1}^{N}(m_l\ddot{\bar r}_l - \bar F_l)\frac{\partial \bar r_l}{\partial q_j} = 0$

Обозначим: $\sum\limits_{l=1}^{N} m_l \ddot{\bar r}_l \frac{\partial \bar r_l}{\partial q_j} = X_j$ (некий скаляр), $\sum\limits_{l=1}^{N} \bar F_l \frac{\partial \bar r_l}{\partial q_j} = Q_j \gg \sum\limits_{j=1}^{s}(X_j - Q_j)\,\delta q_j = 0$

Из независимости обобщенных координат следует, что $X_j = Q_j,\ \forall j = \overline{1,s}$

- Покажем, что X_j можно выразить через кинетическую энергию системы

$K = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \bar v_i \bar v_i$, $\bar v_i = \dot{\bar r}_i$

$\bar r_l = \bar r_l(q_1,\dots,q_s;t) \Longrightarrow \bar v_l = \sum\limits_{j=1}^{s}\frac{\partial \bar r_l}{\partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial \bar r_l}{\partial t} = \bar v_l(q,\dot q,t) \Longrightarrow \frac{\partial \bar v_l}{\partial \dot q_j} = \frac{\partial \bar r_l}{\partial q_j}$

$\frac{\partial K}{\partial q_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_j}\sum\limits_{l=1}^{N} m_l \bar v_l \bar v_l = \sum\limits_{l=1}^{N} m_l \bar v_l \frac{\partial \bar v_l}{\partial q_j} \longrightarrow \frac{\partial K}{\partial \dot q_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot q_j}\sum\limits_{l=1}^{N} m_l \bar v_l \bar v_l = \sum\limits_{l=1}^{N} m_l \bar v_l \frac{\partial \bar v_l}{\partial \dot q_j} = \sum\limits_{l=1}^{N} m_l \bar v_l \frac{\partial \bar r_l}{\partial q_j}$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot q_j}\right) = \frac{d}{dt}\sum\limits_{l=1}^{N} m_l \bar v_l \frac{\partial \bar r_l}{\partial q_j} = \sum\limits_{l=1}^{N} m_l \dot{\bar v}_l \frac{\partial \bar r_l}{\partial q_j} + \sum\limits_{l=1}^{N} m_l \bar v_l \frac{\partial \bar v_l}{\partial q_j} = X_j + \frac{\partial K}{\partial q_j}$

$$X_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}$$

- $X_j = Q_j \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j,\ j = \overline{1,s}$ – уравнение Лагранжа относительно кинетической энергии

Обобщенная сила.

Обобщенная сила – величина, определяемая $Q_j = \sum\limits_{l=1}^{N}\bar F_l \frac{\partial \bar r_l}{\partial q_j},\ j = \overline{1,s}$.

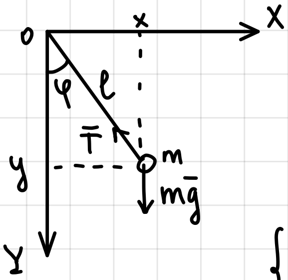
Сколько обобщенных координат – столько обобщ. сил.

Размерность зависит от размерности обобщенной координаты. $[q] = м \to [Q] = Н$

$[q] = рад. \to [Q] = Н\cdot м$ (размерность момента сил)

Обобщенная сила объединяет понятия силы и момента сил.

Пример: плоский математический маятник



Эта система имеет одну степень свободы, $s = 1$.

Обобщенная координата $q = \varphi$ – угол отклонения от вертикали

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial K}{\partial \varphi} = Q$, где $K = \frac{1}{2}mv^2$ – кинетич. энергия маятника

$Q = m\bar g \frac{\partial \bar r}{\partial \varphi}$ – обобщенная сила

$\begin{cases} x = l\sin\varphi \\ y = l\cos\varphi \end{cases}$ $\begin{cases} \dot x = l\dot\varphi\cos\varphi \\ \dot y = -l\dot\varphi\sin\varphi \end{cases} \to \begin{matrix} v^2 = \dot x^2 + \dot y^2 = l^2\dot\varphi^2 \\ K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot\varphi^2 \\ Q = mg\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi \end{matrix} \to \begin{matrix} \frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = ml^2\dot\varphi \end{matrix}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) = ml^2\ddot\varphi \Longrightarrow ml^2\ddot\varphi = -mgl\sin\varphi$ или $\ddot\varphi + \frac{g}{l}\cdot\sin\varphi = 0$

31. Функция Лагранжа. Обобщённые импульсы.

Рассмотрим систему с идеальными голономными связями и потенциальными заданными силами.

$$\Pi_\ell = \Pi_\ell(\bar r), \quad \bar F_\ell = -\operatorname{grad}\Pi_\ell = -\left(\bar i \frac{\partial \Pi_\ell}{\partial x_\ell} + \bar j \frac{\partial \Pi_\ell}{\partial y_\ell} + \bar k \frac{\partial \Pi_\ell}{\partial z_\ell}\right)$$

$$F_\ell \frac{\partial \bar r_\ell}{\partial q_j} = -\left(\frac{\partial \Pi_\ell}{\partial x_\ell}\cdot\frac{\partial x_\ell}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_\ell}{\partial y_\ell}\cdot\frac{\partial y_\ell}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_\ell}{\partial z_\ell}\frac{\partial z_\ell}{\partial q_j}\right) = -\frac{\partial \Pi_\ell}{\partial q_j}$$

$$\bar r_\ell = \bar r_\ell(q_1, \dots, q_s, t), \quad \{q\} \to \Pi_\ell = \Pi_\ell(\bar r) = \Pi_\ell(q, t)$$

$$Q_j = \sum_{\ell=1}^{N} \bar F_\ell \frac{\partial \bar r_\ell}{\partial q_j} = -\sum_{\ell=1}^{N} \frac{\partial \Pi_\ell}{\partial q_j} = -\frac{\partial}{\partial q_j}\sum_{\ell=1}^{N}\Pi_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j},$$ где $\Pi = \sum_{i=1}^{N}\Pi_i = \Pi(q,t)$ – полная потенц. энергия с-мы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (K-\Pi)}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial (K-\Pi)}{\partial q_j} = 0$$

Потенциальная энергия не зависит от обобщенных скоростей $\Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial \dot q_j} = 0$

Функция Лагранжа (Лагранжиан) – разность кинетической и потенциальной энергией системы, выраженная через обобщенные координаты, обобщенные скорости и время.

$$L = K - \Pi = L(q, \dot q, t)$$

Уравнение Лагранжа отн-но ф-ии Лагранжа: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = \overline{1,s}$

Обобщенный импульс – частная производная ф-ии Лагранжа по обобщенной скорости

$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}, \; j = \overline{1,s}$. Размерность определяется размерностью обобщенной координаты.

$$[p] = \frac{Dm\cdot c}{[q]} \to [q] = м \to [p] = [mV]$$
$$\searrow [q] = рад \to [p] = [mVr]$$

Понятие обобщенного импульса объединяет понятие обычного импульса и момента имп-са.

Закон изменения обобщенного импульса.

$\dot p_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$ Согласно формуле скорость изменения обобщ. импульса равна производной ф-ии Лагранжа по обобщ. координате.

Закон сохранения обобщенного импульса

Если же частная производная в правой части равна 0, то $\dot p_j = 0 \Rightarrow p_j = const$

Объединяет в себе законы сохранения импульса и момента импульса отн-но оси.

Пример: сферический математический маятник

2 степени свободы: угол отклонения от вертикали и угол поворота

В этой системе действует закон сохранения момента импульса отн-но вертикальной оси.

32. Уравнение Гамильтона. Канонические переменные.

Рассмотрим систему с идеальными голономными связями и потенциальными заданными силами и будем описывать состояние с-мы набором обобщенных координат и импульсов.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \quad \text{или} \quad \dot p_j=\frac{\partial L}{\partial q_j},\ j=\overline{1,s}, \quad p_j=\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}$$

$L=K-\Pi=L(q,\dot q,t)$ – ф-ия Лагранжа

Вычислим её дифференциал: $dL=\sum\limits_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}dq_j+\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}d\dot q_j\right)+\frac{\partial L}{\partial t}dt=\sum\limits_{j=1}^{s}(\dot p_j dq_j+p_j d\dot q_j)+\frac{\partial L}{\partial t}dt$

Функция Гамильтона: $H=\sum\limits_{j=1}^{s}\dot q_j p_j-L$

$$dH=\sum_{j=1}^{s}(\dot q_j dp_j+p_j d\dot q_j)-dL=\sum_{j=1}^{s}(\dot q_j dp_j+\cancel{p_j d\dot q_j}-\dot p_j dq_j-\cancel{p_j d\dot q_j})-\frac{\partial L}{\partial t}dt=\sum_{j=1}^{s}(\dot q_j dp_j-\dot p_j dq_j)-\frac{\partial L}{\partial t}dt$$

Выразим ф-ию через обобщ. коорд., обобщ. импульсы и время: $H=H(q,p,t)$

$$dH=\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}dq_j+\frac{\partial H}{\partial p_j}dp_j\right)+\frac{\partial H}{\partial t}dt, \quad \dot q_j=\frac{\partial H}{\partial p_j},\ \dot p_j=-\frac{\partial H}{\partial q_j}$$ – уравнения Гамильтона $j=\overline{1,s}$

$H=\sum\limits_{j=1}^{s}\dot q_j p_j-L=H(q,p,t)$ гамильтониан системы

33. Гамильтониан. Консервативная система.

Закон изменения Гамильтониана

$$\dot H=\frac{dH}{dt}=\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\dot q_j+\frac{\partial H}{\partial p_j}\dot p_j\right)+\frac{\partial H}{\partial t}=\sum_{j=1}^{s}(-\dot p_j\dot q_j+\dot q_j\dot p_j)+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t} \Rightarrow \frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}$$

Полная производная гамильтона по времени равна частной производной по времени $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ если гамильтон не зависит от времени, то он не меняется в процессе движения с-мы.

Консервативная система – система, Гамильтониан которой явно не зависит от t.

$\frac{\partial H}{\partial t}=0 \Rightarrow \dot H=0$, т.е $H=H(p,q)=const$

Покажем, что для консервативной с-мы гамильтон имеет смысл её полной механической энергии, т.е $H=K+\Pi$

Не должно быть нестационарных связей: $\bar r_\ell=\bar r_\ell(q_1,\dots,q_s)$, $K=K(q,\dot q)$, $\Pi=\Pi(q)$

$$p_j=\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}=\frac{\partial (K-\Pi)}{\partial \dot q_j}=\frac{\partial K}{\partial \dot q_j} \quad j=\overline{1,s}$$

$$K=\frac12\sum_{\ell=1}^{N}m_\ell v_\ell^2=\frac12\sum_{\ell=1}^{N}m_\ell\bar v_\ell\bar v_\ell, \text{ где } \bar v_\ell=\dot{\bar r}_\ell,\quad \bar v_\ell=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \bar r_\ell}{\partial q_j}\dot q_j$$

$$\Rightarrow K=\frac12\sum_{\ell=1}^{N}m_\ell\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial \bar r_\ell}{\partial q_\alpha}\dot q_\alpha\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial \bar r_\ell}{\partial q_\beta}\dot q_\beta=\frac12\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s}\dot q_\alpha\dot q_\beta\cdot\sum_{\ell=1}^{N}m_\ell\frac{\partial \bar r_\ell}{\partial q_\alpha}\frac{\partial \bar r_\ell}{\partial q_\beta}=\frac12\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s}K_{\alpha\beta}\dot q_\alpha\dot q_\beta$$

$K_{\alpha\beta}=\sum\limits_{\ell=1}^{N}m_\ell\frac{\partial \bar r_\ell}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial \bar r_\ell}{\partial q_\beta}=K_{\beta\alpha}=K_{\beta\alpha}(q)$ (симметричная матрица, завис. только от обобщ. координат)

$$p_j=\frac{\partial K}{\partial \dot q_j}=\frac{\partial}{\partial \dot q_j}\frac12\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s}K_{\alpha\beta}\dot q_\alpha\dot q_\beta=\frac12\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s}K_{\alpha\beta}\dot q_\alpha\frac{\partial \dot q_\beta}{\partial \dot q_j}+\frac12\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s}K_{\alpha\beta}\dot q_\beta\frac{\partial \dot q_\alpha}{\partial \dot q_j}$$

$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\ne j\end{cases}$ – символ Кронекера $\Rightarrow p_j=\frac12\sum\limits_{\alpha=1}^{s}\sum\limits_{\beta=1}^{s}K_{\alpha\beta}\dot q_\alpha\delta_{\beta j}+\frac12\sum\limits_{\alpha=1}^{s}\sum\limits_{\beta=1}^{s}K_{\alpha\beta}\dot q_\beta\delta_{\alpha j}$

$$p_j=\frac12\sum_{\alpha=1}^{s}\dot q_\alpha\sum_{\beta=1}^{s}K_{\alpha\beta}\delta_{\beta j}+\frac12\sum_{\beta=1}^{s}\dot q_\beta\sum_{\alpha=1}^{s}K_{\alpha\beta}\delta_{\alpha j}=\frac12\sum_{\alpha=1}^{s}\dot q_\alpha K_{\alpha j}+\frac12\sum_{\beta=1}^{s}\dot q_\beta K_{j\beta}=\sum_{\alpha=1}^{s}K_{j\alpha}\dot q_\alpha \Rightarrow p_j=\sum_{\alpha=1}^{s}K_{j\alpha}\dot q_\alpha$$

$$H=\sum_{j=1}^{s}\dot q_j p_j-L=\sum_{j=1}^{s}\dot q_j\sum_{\alpha=1}^{s}K_{j\alpha}\dot q_\alpha-L=\underline{\sum_{j=1}^{s}\sum_{\alpha=1}^{s}K_{j\alpha}\cdot\dot q_j\cdot\dot q_\alpha}-L=\underline{2K}-L=2K-(K-\Pi)=K+\Pi=H(q,p)$$

Пример: частица в постоянном силовом поле

$\Pi=\Pi(x,y,z)$ $\qquad K=\frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)\rightarrow p_x=\frac{\partial K}{\partial \dot x}=m\dot x$, $p_y=\frac{\partial K}{\partial \dot y}=m\dot y$, $p_z=\frac{\partial K}{\partial \dot z}=m\dot z$

$H=K+\Pi$ $\qquad \Rightarrow \dot x=\frac{p_x}{m}$, $\dot y=\frac{p_y}{m}$, $\dot z=\frac{p_z}{m}\Rightarrow K=\frac{1}{2m}\cdot(p_x^2+p_y^2+p_z^2)$

$K=\frac{mv^2}{2}$

$q_1=x,\ q_2=y,\ q_3=z$ $\qquad H=K+\Pi=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+\Pi(x,y,z)$

34. Равновесие системы и его устойчивость.

Равновесие – состояние, в котором система, предоставленная самой себе, может находиться сколь угодно долго.

Условия равновесия:

1) Сумма сил, действующих на каждую материальную точку системы, должна быть равна нулю. $\vec{F}_l + \vec{R}_l = 0$, $l = \overline{1,N}$

2) Рассмотрим систему с идеальными связями: $\delta A_R = \sum_{l=1}^{N} R_l \delta r_l = 0$, $\sum_{l=1}^{N} \vec{F}_l \delta \vec{r}_l = 0$

Т.е. в состоянии равновесия виртуальная работа заданных сил равна нулю.

3) Перейдем к обобщенным координатам:

$$\vec{r} \to q, \quad \delta \vec{r}_l = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j \quad \Rightarrow \quad \sum_{l=1}^{N} F_l \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial r_l}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \delta q_j \overbrace{\sum_{l=1}^{N} F_l \frac{\partial r_l}{\partial q_j}}^{Q_j} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j = 0$$

Из независимости обобщенных координат $\Rightarrow$ все обобщенные силы в состоянии равновесия должны быть равны нулю: $Q_j = 0$, $j = 1, s$

4) $Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \Rightarrow$ В состоянии равновесия потенциальная энергия системы должна иметь экстремум по всем обобщенным координатам

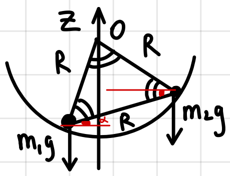
$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0, \quad j = \overline{1,s}$$

Устойчивость равновесия:

Равновесие устойчиво, если система, выведенная из этого состояния, и предоставленная самой себе, начинает двигаться в сторону положения равновесия.

Устойчивость равновесия зависит от типа экстремума потенциальной энергии. Если в этой точке достигается „минимум", то равновесие устойчиво.

Пример: гантелька в гладкой сферической чаше



α - ?

$s = 1$, $q = \alpha$ (выбрали в качестве обобщенной координаты угол α)

$\Pi = m_1 g z_1 + m_2 g z_2$

$z_1 = -R\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$, $z_2 = -R\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$

$$\Rightarrow \Pi = \Pi(\alpha) = -m_1 g R \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - m_2 g R \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = -m_1 g R\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + m_2 g R\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = m_2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$$

$$m_1\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right) = m_2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right) \to m_1(1 - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha) = m_2(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha)$$

$$\to \sqrt{3}(m_1 + m_2)\,\mathrm{tg}\,\alpha = (m_1 - m_2) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{m_1 - m_2}{\sqrt{3}(m_1 + m_2)}\right)$$

35. Колебания в системах с одной степенью свободы

Колебания – повторяющиеся движения в окрестности положения устойчивого равновесия системы.

Период колебаний – продолжительность одного полного колебания. $[T] = c$

Уравнения гармонических колебаний

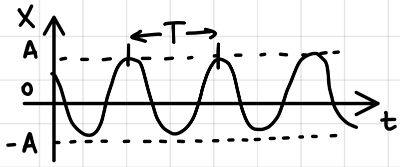
В системах с одной степенью свободы: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, t – время, ω – частота колебаний

X – обобщенная координата, отсчитывающаяся от положения равновесия системы.

Общее решение: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

Гармонической наз-ся ф-ия, меняющаяся по законам sin/cos

A – амплитуда, φ – начальная фаза колебаний



Фаза – аргумент тригоном. ф-ии, описывающий колебание. $\Phi = \omega t + \varphi$. $\Phi(t=0) = \varphi$

Амплитуда колебаний имеет смысл максимального отклонения колеблющегося тела от положения равновесия

Частота колебаний $\omega = 2\pi/T$

$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$

$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$

Определим амплитуду и начальную фазу колебаний:

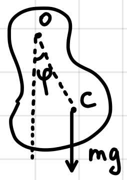
$x(0) = A\cos\varphi = x_0$, $\dot{x}(0) = -A\omega\sin\varphi = \dot{x}_0 \Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2/\omega^2}$, $\cos\varphi = x_0/A$, $\sin\varphi = -\dot{x}_0/A\omega$

Эти формулы выражают амплитуду и начальную фазу колебаний через начальные условия.

Определим частоту колебаний:

Надо записать ур-ие движения и привести его к стандартному виду ур-ия: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Пример: 1) физический маятник



$S = 1$, $q = \varphi$ (выбрали в качестве обобщенной координаты угол отклонения φ)

$\dot{\varphi} = d\varphi/dt = \omega$

$K = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}$, $\Pi = -mgl\cos\varphi \rightarrow L = K - \Pi = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} - mgl\cos\varphi = L(\varphi, \dot{\varphi})$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow I\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0 \rightarrow \ddot{\varphi} + \omega^2\sin\varphi = 0$, где $\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$

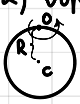
Далее рассмотрим малые колебания: $\varphi << 1$, $\sin\varphi \approx \varphi$

$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$, $\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$ – частота колебаний произвольного физического маятника

l – расстояние от оси вращения до центра масс

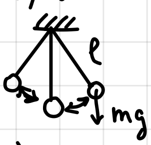
I – момент инерции маятника отн-но оси вращения

2) обруч



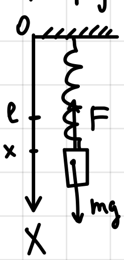
$I = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{2R}}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$

3) математический маятник



$I = ml^2$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ – формула Гюйгенса

4) пружинный осциллятор



$m\ddot{x} = mg - k(x - l)$

$m\ddot{x} + k(x - l) - mg = 0$

$m\ddot{x} + k(x - l - \frac{mg}{k}) = 0 \rightarrow$

Пусть $y = x - l - \frac{mg}{k}$

$\ddot{y} = \ddot{x}$

$m\ddot{y} + ky = 0 \rightarrow \ddot{y} + \omega^2 y = 0$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

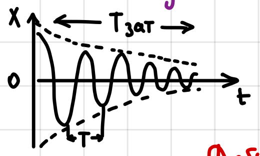
36. Физические эффекты в колебательных системах.

1. Гармонические колебания

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Пример: математический маятник, пружинный осциллятор (при небольших ампл. колебаний)

2. Затухающие колебания



$\ddot{x} + a\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Физическая причина затухания – сила трения

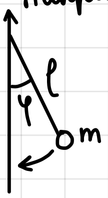
$T_{зат}$ – время, в течение которого амплитуда уменьшается в 2 раза.

Добротность: $Q = T_{зат}/T$ – сколько колебаний пройдет до заметного уменьшения A.

3. Нелинейные колебания

$\ddot{x} + f(x) = 0$

Например, ур-ие колебаний маятника: $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$



$$\begin{cases} K = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{m}{2}\ell^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \\ П = -mg\ell\cos\varphi \\ E = K + П = const \end{cases} \rightarrow \quad \frac{m}{2}\ell^2\dot{\varphi}^2 - mg\ell\cos\varphi = E$$

$$\dot{\varphi}^2 - 2\frac{g}{\ell}\cos\varphi = \frac{2E}{m\ell^2}$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2E}{m\ell^2} + 2\frac{g}{\ell}\cos\varphi$$

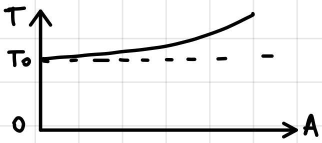
$$\dot{\varphi} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m\ell^2} + 2\frac{g}{\ell}\cos\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\rightarrow \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2E}{m\ell^2} + 2\frac{g}{\ell}\cos\varphi}} = \pm\int_{t_0}^{t} dt = \pm t$$

Интеграл не выражается через элементарные ф-ии (эллиптич. интеграл)

Анализ этого интеграла выявляет основную физическую особенность нелинейных колебаний – период колебаний зависит от амплитуды.

Чем больше A – тем больше T. (неизохронность колебаний)

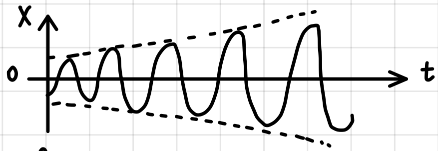


4. Параметрические колебания

$\ddot{x} + \omega^2(t)\, x = 0$

Системы с нестационарными связями

Параметрический резонанс – возрастание амплитуды колебания маятника с течением времени



5. Вынужденные колебания

Колебания, происходящие под действием периодически меняющейся внешней силы.

$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$, где $f(t) = f_0 \cos\omega t$

Найдем решение ур-ия вынужденных колебаний

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ – ур-ие Эйлера $\Rightarrow e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$

$\cos\varphi = \frac{1}{2}e^{i\varphi} + \frac{1}{2}e^{-i\varphi} \equiv \frac{1}{2}e^{i\varphi} + k.c$ (комплексно-сопряженное выражение)

$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) = \frac{1}{2}f_0 e^{i\varphi} + k.c$

$x(t) = \frac{1}{2}Ae^{i\omega t} + k.c \qquad \dot{x} = i\omega\frac{1}{2}Ae^{i\omega t} + k.c \qquad \ddot{x} = -\omega^2\frac{1}{2}Ae^{i\omega t} + k.c$

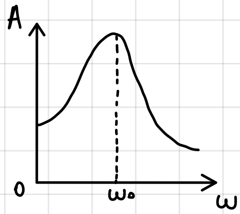
Подставим в ур-ие колебания: $f_0 = (\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\alpha)\cdot A$

$$\Rightarrow A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\alpha}$$ (частное решение)

Резонанс – возрастание амплитуды колебаний при совпадении частоты изменения внешней силы с собственн. частотой колебаний системы.

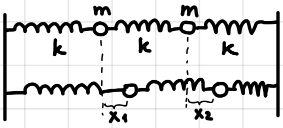
$\omega \to 0: \quad A = f_0/\omega_0^2$

$\omega \to \infty: \quad A = -f_0/\omega_0^2$



37. Нормальные колебания и нормальные координаты.

Рассмотрим колебательную систему с 2мя степенями свободы



$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2-x_1) - kx_2 \end{cases}$$ Эти ур-ия оказались связанными

$$\begin{cases} m(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2) = -k(x_2+x_1) \\ m(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1) = -3k(x_2-x_1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q_1 = x_1 + x_2 \\ Q_2 = x_2 - x_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{Q}_1 + \omega_1^2 Q_1 = 0, & \omega_1 = \sqrt{k/m} \\ \ddot{Q}_2 + \omega_2^2 Q_2 = 0, & \omega_2 = \sqrt{3k/m} \end{cases}$$ Эти ур-ия не связаны

$x_1 = \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2)$, $x_2 = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2)$

Q_1 и Q_2 примем за новые обобщенные координаты.

Из независимости ур-ий для Q_1 и Q_2 следует, что при любых движениях системы эти величины меняются независимо друг от друга

Нормальные координаты — обобщенные координаты, которые при любых движениях с-мы меняются независимо друг от друга. Каждая из нормальных координат колеблется по гармоническому закону на своей собственной частоте.

Собственные частоты колебаний системы. Число собственных частот = числу степеней свободы с-мы.

Нормальные колебания — гармонические колебания на одной из собственных частот системы.

Такие колебания реализуются, если отлична от нуля только одна нормальная координата.

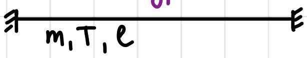
Примеры: N1: $Q_2(t) = 0 \rightarrow x_1(t=0) = x_2(t=0)$

N2: $Q_1(t) = 0 \rightarrow x_1(t=0) = -x_2(t=0)$

38. Колебание струны.

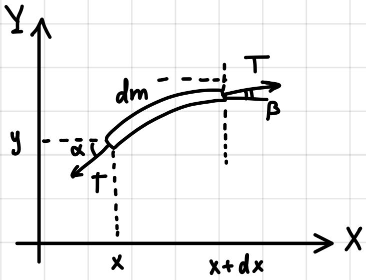
Волна — колебание, распространяющееся в сплошной среде.

Волновое уравнение:



Линейная плотность струны $\rho = \frac{m}{\ell}$

$dm = \rho \cdot dx$



$$dm \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\sin\beta - T\sin\alpha, \quad \underbrace{\sin\alpha \approx tg\alpha = y'(x), \quad \sin\beta \approx tg\beta = y'(x+dx)}_{\text{малые } \alpha \text{ и } \beta}$$

$$\Rightarrow dm \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\cdot[y'(x+dx) - y'(x)] = T\cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = \rho dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ или $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, где $v = \sqrt{T/\rho}$ — **ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ**; v — скорость распространения волны

Решение волнового ур-ия: $y(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$

Бегущие волны: $\exists\ x - vt = const \Rightarrow dx - vdt = 0$ и $dx/dt = v$

Поперечная — волна в струне, т.к направление движения элементов струны перпендикулярно направлению распространения волны

Стоячая волна

Волна, которая описывается произведением ф-ии времени на ф-ию координат.

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ в виде $y(x,t) = X(x)\cdot\Theta(t)$

$X\ddot{\Theta} = v^2 X''\Theta$, где $\ddot{\Theta} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}$, $X'' = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$

Разделим переменные: $\frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} = v^2\cdot\frac{X''}{X} = const = -\omega^2 \Rightarrow \ddot{\Theta} + \omega^2\Theta = 0$, $\Theta(t) = A\sin\omega t$ (частное решение)

$X'' + \frac{\omega^2}{v^2}X = 0 \rightarrow X'' + k^2 X = 0$, $k = \frac{\omega}{v} \rightarrow X(x) = B\sin kx$

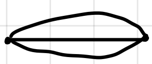
$$\Rightarrow y(x,t) = AB\sin kx\cdot\sin\omega t, \quad k = \omega/v$$

Длина волны: $\lambda = vT$;

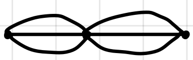
Волновое число: $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$

Граничные условия: $y(x=0) = y(x=\ell) = 0$ $\begin{cases}\sin k\ell = 0 \\ k\ell = n\cdot\pi \end{cases}$ $(n = 1, 2, \dots) \Rightarrow k_n = n\cdot\frac{\pi}{\ell}$ (возможные волновые числа) и $\omega_n = vk_n = n\frac{\pi}{\ell}v = n\frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ (возможные частоты колебаний струны)

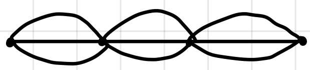
Обертон — колебание струны на частотах, больших, чем частота основного тона



основной тон



1-ый обертон



2ой обертон

39. Случайные величины и вероятности.

Рассмотрим систему, состоящую из большого числа частиц. Такую систему сложно описать на языке закона движения, но можно описать на языке теории вероятности.

Случайное событие – событие, исход которого нельзя предсказать заранее, но наблюдение которого можно многократно повторять.

Вероятность случайного события – отношение числа появления события в серии испытаний к полному числу испытаний, когда число испытаний стремится к бесконечности: $p(A) = \lim\limits_{N\to\infty} N_A/N$, $0 \le p(A) \le 1$

Аксиома сложения вероятностей

Вероятность наступления одного из взаимоисключающих событий равно сумме их вероятностей: $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Аксиома умножения вероятностей

Вероятность наступления независимых случайных событий равна произведению их вероятностей: $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$

Случайная величина – величина, значение которой нельзя предсказать заранее, но измерение которой можно многократно повторить.

Распределение плотности вероятности – отношение вероятности попадания случайной величины в малый интервал вблизи заданного значения к величине этого интервала в пределе, когда интервал стремится к нулю.

$$w(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{p(x_0 \le x \le x_0+\Delta x)}{\Delta x}, \quad w(x) \ge 0, \quad [w(x)] = 1/[x]$$

Условие нормировки: $\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\,dx = 1$ (~ с.в примет одно из всех своих возм. знач.)

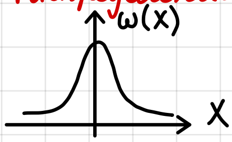
Правила вычисления средних: $\langle f(x)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,w(x)\,dx$

Среднее значение случайной величины – $\langle x\rangle = \overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,w(x)\,dx$

Дисперсия случайной величины – средний квадрат отклонения случайной величины от её среднего значения. σ^2. $\sigma^2 = \int (x-\overline{x})^2 w(x)\,dx \leftrightarrow \sigma^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$

Распределение Гаусса $w(x) = C\cdot e^{-\alpha x^2}$, $-\infty < x < +\infty$, $C = const$, α – параметр распр.

$\forall$ линейная комбинация гауссовых с.в – гауссова с.в



Интеграл Пуассона $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

Многомерная плотность вероятности – отношение вероятности попадания нескольких случайных величин в малые интервалы вблизи заданных значений к произведению величин интервалов в пределе, когда интервал стремится к нулю.

$$w(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x,\Delta y\to 0} \frac{p(x_0 \le x \le x_0+\Delta x,\ y_0 \le y \le y_0+\Delta y)}{\Delta x\cdot\Delta y}, \quad w(x,y) \ge 0, \quad [w(x,y)] = 1/[xy]$$

Условие нормировки: $\iint w(x,y)\,dx\,dy = 1$

Правило вычисления средних: $\langle f(x,y)\rangle = \iint f(x,y)\,w(x,y)\,dx\,dy$

Понижение порядка распределения: $w_1(x) = \int w(x,y)\,dy$, $w_2(y) = \int w(x,y)\,dx$

Независимые случайные величины – для них многомерная плотность вероятности равна произведению плотностей вероятности $w(x,y) = w_1(x)\cdot w_2(y)$

40. Распределение Гиббса.

Термодинамическое равновесие – состояние, в котором система, предоставленная самой себе, может находиться сколь угодно долго.

Основной закон статистической механики равновесных систем.

В состоянии термодинамического равновесия распределение плотности вероятности для различных состояний системы, описывается формулой Гиббса.

$w(z) = C \cdot e^{-H(z)/kT}$, $z = q, p$ – набор обобщ. коорд-ат и импульсов системы, $H = K + \Pi$ – гамильтониан с-мы, T – абс. температура с-мы ($T = t^\circ C + 273$), $C = const$, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град – постоянная Больцмана.

Единица измерения температуры – **градус Цельсия** – $1/100$ интервала между температурой плавления льда и температурой кипения воды при норм. давлении.

Абсолютная температура $T = t^\circ C + 273$ в градусах Кельвина

Частные случаи распределения Гиббса

- **Распределение молекул по скоростям**

$$w(v_x, v_y, v_z) = C \cdot e^{\left(-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2kT}\right)}$$ – распределение Максвелла

$$w(v_x) = C \cdot e^{-\frac{mv_x^2}{kT}}$$

- **Дисперсия тепловой скорости молекул**

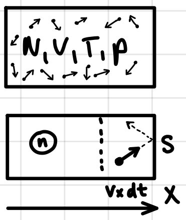
$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \, w(v_x) \, dv_x$$

$$w(v_x) = C \cdot e^{-\frac{mv_x^2}{kT}} \rightarrow dw(v_x) = w \cdot \left(-\frac{m}{2kT}\right) \cdot 2v_x \, dv_x = -\frac{m}{kT} w v_x dv_x \Rightarrow w v_x dv_x = -\frac{kT}{m} dw(v_x)$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 w(v_x) dv_x = -\frac{kT}{m}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x dw(v_x) = \frac{kT}{m}\int_{-\infty}^{+\infty} w(v_x) dv_x = \frac{kT}{m}, \text{ т.к. } \int_{-\infty}^{+\infty} w(v_x) dv_x = 1$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m}$$

- **Уравнение состояния идеального газа**



Найдем давление газа. Объем V, темп. T, число молекул в сосуде N.
Концентрация молекул $n = N/V$, $[n] = 1/м^3$
Рассмотрим молекулы, скорости которых в направлении оси x лежат в интервале $[v_x, v_x + dv_x]$. $p = 2mv_x$ (при ударе о стенку сосуда).
Суммарный импульс, который передадут эти молекулы стенкам за dt:
$$2mv_x \cdot nSv_x dt \cdot w(v_x) dv_x = 2mnS \cdot v_x^2 w(v_x) dv_x \cdot dt$$

$$dp = 2mv_x^2 Sn \, w(v_x) dv_x \quad [\text{Па}] \Rightarrow p = \int dp = 2mn\int_0^\infty v_x^2 w(v_x) dv_x = mn\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 w(v_x) dv_x = mn\langle v_x^2 \rangle$$

$$p = nkT$$

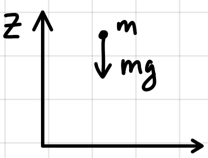
- **Распределение частиц во внешнем силовом поле**

$$w(x, y, z) = C \cdot e^{-\frac{\Pi(x,y,z)}{kT}}$$ – распределение Больцмана

- **Распределение частиц в поле сил тяжести**

$$\Pi = mgz \Rightarrow w(z) = C \cdot e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

- **Средняя высота частицы над поверхностью Земли**



$$\langle z \rangle = \int_0^\infty z w(z) dz, \quad z_0 = \frac{kT}{mg}$$

$$w(z) = C \cdot e^{-\frac{z}{z_0}} \rightarrow dw(z) = w \cdot \left(-\frac{1}{z_0}\right) dz \Rightarrow w(z) dz = -z_0 dw(z)$$

$$\langle z \rangle = \int_0^\infty z w(z) dz = -z_0 \int_0^\infty z \, dw(z) = z_0 \int_0^\infty w(z) dz = z_0 = \frac{kT}{mg}, \text{ т.к. } \int_0^\infty w(z) dz = 1$$

$$\langle z \rangle = \frac{kT}{mg}$$

41. Размер и масса молекул.

Масса молекул воздуха.

$p = nkT \rightarrow n_0 = \frac{p_0}{kT_0}$ $(p_0 = 10^5$ Па, $T = 273$ К$) \Rightarrow n_0 = 2{,}7 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$

Число Лошмидта – определяет концентрацию молекул $\forall$ газа при норм. условиях. (n_0)

$V_1 = 1/n_0 = 0{,}37 \cdot 10^{-25}$ м^3 — объем, который приходится в среднем на 1 молекулу газа при норм. усл.

$\rho = m/V$, $\rho_{воздуха} = \rho_0 = 1{,}3$ кг/м^3

m_0 – масса молекулы воздуха. $m = Nm_0 \Rightarrow \rho_0 = \frac{Nm_0}{V} = n_0 m_0 \Rightarrow m_0 = \rho_0/n_0 = 0{,}5 \cdot 10^{-25}$ кг

Размер молекул воздуха.

Из несжимаемости жидкости следует, что молекулы расположены в ней вплотную, значит $\rho_{жидкости} = \rho_ж$ равна плотности вещества в отдельной молекуле.

$\rho_ж \approx m_0/V_0 = m_0/d_0^3 = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3 $\Rightarrow d_0 = (m_0/\rho_ж)^{1/3} = 3{,}8 \cdot 10^{-10}$ м

Оценим тепловую скорость движения молекул: $v_T = \sqrt{\langle v_x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{kT}{m}} \approx 300$ м/с

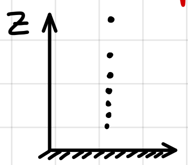
Оценим время свободного пробега молекул: $\tau_c = \frac{t}{N_c} = t \cdot \left(\frac{\pi d_0^2 L}{V_1}\right)^{-1} = \frac{\sqrt{m/kT}}{4\sqrt{\pi}\, d_0^2 n_0} = 1{,}2 \cdot 10^{-10}$ с

42. Измерение постоянной Больцмана.

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{град.}$

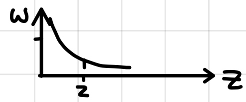
Эту величину можно измерить путём наблюдений за броуновским движением. Можно измерить распределение концентрации броуновских частиц по высоте.

Опыт Перрена: 1908 г. $\langle z \rangle = \frac{kT}{mg}$ (Частицы поднимаются за счет теплового движения)



$V = \pi d^3/6$, $m = \rho V$, $F_A = \rho_0 V g$ $\qquad w(z) = Ce^{-\frac{mgz}{kT}}$

$\langle z \rangle = \frac{6kT}{(\rho - \rho_0)\pi d^3 g} \Rightarrow k = \langle z \rangle \cdot \frac{(\rho - \rho_0)\pi d^3 g}{6T}$



Для оценки используем: $\rho = 1{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3

$\rho_0 = 10^3$ кг/м^3, $d = 0{,}4 \cdot 10^{-6}$ м, $\langle z \rangle = 6 \cdot 10^{-5}$ м, $T = 300$ К, $g = 9{,}8$ м/с^2

$\Rightarrow k \approx 1{,}3 \cdot 10^{-23}$ Дж/град.

43. Распределение энергии по степеням свободы.

Закон распределения энергии по степеням свободы

В состоянии термодинамического равновесия средняя энергия, приходящаяся на каждую квадратичную степень свободы равна $E = kT/2$.

Квадратичная степень свободы – переменная, вклад которой в гамильтониан пропорционален квадрату этой переменной. Обозначим z_1.

$H(z) = az_1^2 + h(z')$, $z = z_1, z'$, $a = a(z')$

$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi(x,y,z)$ – гамильтониан частицы в потенциальном поле

$\langle az_i^2\rangle = \int az_i^2\, w(z)dz$, где $w(z) = c\cdot e^{-H(z)/kT}$

$\langle az_i^2\rangle = c\int_{-\infty}^{+\infty} az_i^2 e^{-az_i^2/kT}\cdot e^{-h(z')/kT}dz = C\int_{-\infty}^{+\infty}dz' e^{-h(z')/kT}\int_{-\infty}^{+\infty}az_i^2 e^{-az_i^2/kT}dz_i$

$\int_{-\infty}^{+\infty}az_1^2 e^{-\frac{az_1^2}{kT}}dz_1 = -\frac{kT}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}z_1 d e^{-\frac{az_1^2}{kT}} = \frac{kT}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{az_1^2}{kT}}dz_1 = \frac{kT}{2}\cdot C\int_{-\infty}^{+\infty}dz' e^{-h(z')/kT}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-az_1^2/kT}dz_1$

$\Rightarrow \langle az_i^2\rangle = \frac{kT}{2}\int w(z)dz = \frac{kT}{2} \Rightarrow E = \frac{kT}{2}$

Пример: (внутренняя энергия идеального газа)

Внутренняя энергия – энергия движения и взаимодействия частиц, составляющих с-му.

В статистической механике внутренняя энергия – среднее значение гамильтониана: $u = \langle H\rangle$

Для идеального газа $\Pi = 0 \Rightarrow u = \langle K\rangle = N\langle K_0\rangle = NS\frac{kT}{2}$, s – число степеней свободы частицы

Теплоемкость идеального газа определяется формулой $c = dQ/dt = \frac{du + dA}{dt}$

Рассмотрим нагревание газа при постоянном объеме ($V = const$) $\Rightarrow$ газ не совершает работу, т.е $dQ = du$ $\Rightarrow$ $C = du/dt = NS\frac{k}{2}$

$N = \nu N_A$, ν – число моль газа $\Rightarrow C = \frac{1}{2}\nu R s$, где $R = kN_A = 8{,}31\frac{Дж}{моль\cdot град}$ – универсальная газовая постоянная

$\Rightarrow s = \frac{2C}{\nu R}$ $\qquad S = 5$: o—o (N_2) $\qquad S = 3$: o (He, Ne)

Факты, подтверждающие распределение Гиббса:

1° Свойства газов:

$p = nkT$, $n = N/V$, $N = \nu N_A$, $\nu = m/\mu$, $R = kN_A$

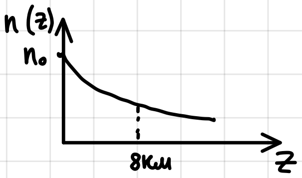
$\Rightarrow pV = \frac{m}{\mu}RT$ ур-ие Менделеева-Клапейрона

2° Распределение воздуха в атмосфере Земли

$w(z) = c\cdot e^{-m_0 gz/kT}$

$\Rightarrow n(z) = n_0\cdot e^{-m_0 gz/kT} = n_0\cdot e^{-z/z_0}$, где $z_0 = \frac{kT}{m_0 g}$ – распределение концентрации

$T = 273K$, $m_0 = 0{,}5\cdot 10^{-25}кг$, $g = 9{,}8$, $k = 1{,}38\cdot 10^{-23}$ Дж/град $\Rightarrow z_0 \approx 8км$

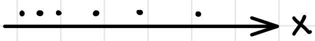


44. Диффузия и теплопроводность.

Диффузия – проникновение одного вещества в другое.

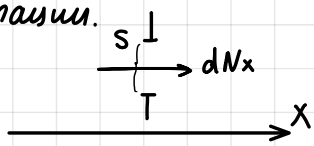
Закон диффузии:

Плотность потока частиц пропорциональна градиенту их концентрации.



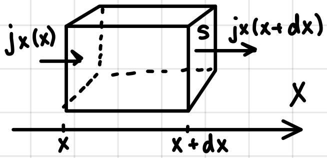
$\exists n = n(x)$, $n = N/V$ $[м^{-3}]$

$j_x = \dfrac{dN_x}{S\,dt} = -D\dfrac{\partial n}{\partial x}$, j_x – плотность потока частиц



Коэффициент диффузии D – коэффициент пропорциональности между плотностью потока частиц и градиентом их концентрации. $[м/с^2]$

Введем **уравнение диффузии**

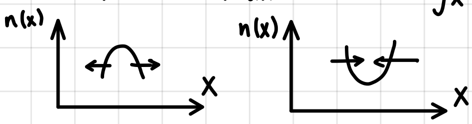


$dV = S\,dx$

$$\begin{cases} dN = j_x(x)S\,dt - j_x(x+dx)S\,dt = -\dfrac{\partial j_x}{\partial x}dx\cdot S\,dt \\ dN = dn\cdot S\,dx \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j_x}{\partial x}$$

показывает сохранение числа частиц

$$j_x = -D\frac{\partial n}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial t^2}$$



а) максимум
б) минимум
концентрации

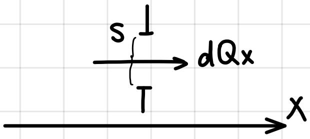
Теплопроводность – процесс переноса тепла в неоднородно нагретом теле

Закон теплопроводности:

Плотность потока тепла пропорциональна градиенту температуры.

$j_x = -\varkappa\dfrac{\partial T}{\partial x}$, $T = T(x)$

$j_x = \dfrac{dQ_x}{S\,dt}$, $[j_x] = Дж/м^2с = Вт/м^2$

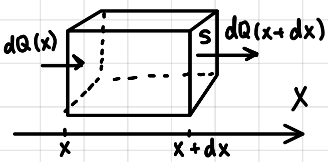


Теплота – энергия, переданная без совершения работы

Коэффициент теплопроводности ($\varkappa$ – каппа) – коэффициент пропорциональности между плотностью потока тепла и градиентом температуры.

$[\varkappa] = Вт/м\cdot град$. Смысл – темп расплывания „теплового" пятна.

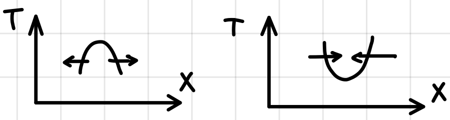
Введем **уравнение теплопроводности**



c – удельная теплоемкость

$$\begin{cases} dQ = j_x(x)S\,dt - j_x(x+dx)S\,dt = -\dfrac{\partial j_x}{\partial x}dx\cdot S\,dt \\ dQ = dm\cdot c\cdot dT = \rho S\,dx\cdot c\cdot dT \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{c\rho}\frac{\partial j_x}{\partial x}$$

$$j_k = -\varkappa\frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\varkappa}{c\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$



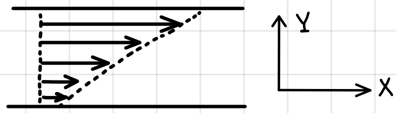
$$\frac{\varkappa}{c\rho} = \chi \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \chi\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$

45. Вязкость жидкости.

Вязкость – свойство жидкости препятствовать движению соприкасающихся с ней тел.

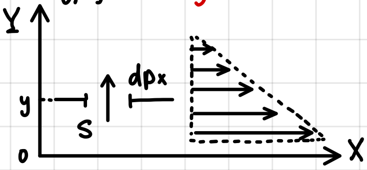
Закон вязкости

Плотность потока импульса пропорциональна градиенту скорости



$v_x = v_x(y)$

Отдельные слои жидкости сдвигаются отн-но другого – сдвиговый поток

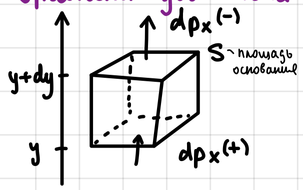


Коэффициент вязкости η – коэффициент пропорцион. между плотностью потока и градиентом скорости. $[\eta] = Па\cdot с$

$$\frac{dp_x}{S\,dt} = -\eta\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Сила вязкого трения: $F_x = \frac{dp_x}{dt} = -\eta\frac{\partial v_x}{\partial y}S$

Уравнение движения вязкого трения

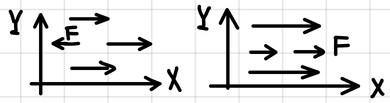


$dV = S\,dy$, $dm = \rho S\,dy$

$dp_x^{(+)} = -\eta S\,dt\cdot\frac{\partial v_x}{\partial y}(y)$, $dp_x^{(-)} = -\eta S\,dt\,\frac{\partial v_x}{\partial y}(y+dy)$

$dp_x = dp_x^{(+)} - dp_x^{(-)} = \eta S\,dt\cdot\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}(y+dy) - \frac{\partial v_y}{\partial y}(y)\right) \approx \eta S\,dt\,\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\cdot dy$

$\frac{dp_x}{dt} = \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}dV = dm\frac{dv_x}{dt} = \rho dV\frac{dv_x}{dt} \Rightarrow \rho\frac{dv_x}{dt} = \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$

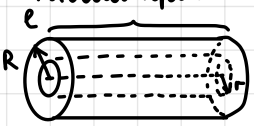


Описывает изменение распределения скоростей частиц в в-ве вследствие хаотического теплового движения.

Если V меняется по квадратичному закону. Max – убывает, min – нарастает с течением времени.

46. Движение вязкой жидкости.

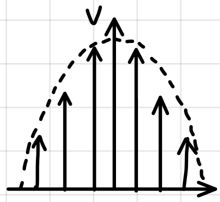
Рассмотрим течение жидкости по трубе



На концах эл-та разность давлений Δp [Па]. Центр масс выделенного объема жидкости движется равномерно.

$\Delta p\pi r^2 + F_x = 0 = \Delta p\pi r^2 + \eta S\frac{dv}{dr}$, $S = 2\pi r l$

$\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta p}{2l\eta}r \Rightarrow dv = -\frac{\Delta p}{2l\eta}r\,dr \Rightarrow \int_{v_0}^{v}dv = -\frac{\Delta p}{2l\eta}\int_0^r r\,dr \Rightarrow v = v_0 - \frac{\Delta p}{4l\eta}r^2$

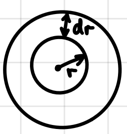


Скорость частиц жидкости в трубе уменьшается по мере удаления от оси трубы по параболическому закону. Пуазейлевский вектор скорости.

Теперь найдем скорость течения жидкости на оси трубы.

$\exists\, v(R) = 0 \Rightarrow v_0 = \frac{\Delta p}{4l\eta}R$, $v(r) = v_0\cdot\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$

Формула Пуазейля:



Вычислим объем жидкости, протекающий по трубе за t.

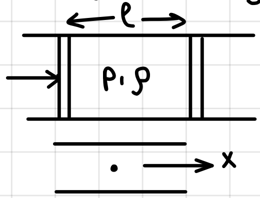
$dV = 2\pi r\cdot dr\cdot v(r)\cdot t$

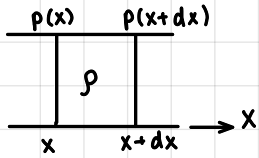
$V = \int dV = 2\pi t\int_0^R v(r)dr = 2\pi t v_0\int r\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)dr = 2\pi t v_0\frac{R^2}{4} = 2\pi t\frac{R^4}{4}\frac{\Delta p}{4l\eta}R^2$

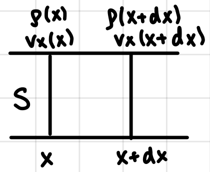
$\Rightarrow V = \frac{\pi\Delta p}{8l\eta}R^4\cdot t$

47. Уравнение динамики сплошной среды.

Введем это ур-ие на примере задачи о распространении звука







p [Па], x [м], t [с], v_x [м/с], ρ [кг/м³]

Уравнение движения элемента среды:

$$dm\,\frac{\partial v_x}{\partial t} = p(x)S - p(x+dx)S = -S\left(p(x+dx) - p(x)\right) = -S\frac{\partial p}{\partial x}dx$$

$$dm = \rho dV,\quad dV = Sdx$$

$$\Rightarrow \rho \cancel{Sdx}\,\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\cancel{S}\,\frac{\partial p}{\partial x}\cancel{dx} \quad\Rightarrow\quad \rho\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

Дальше введем уравнение непрерывности:

$$dm^{(+)} = \rho(x)Sv_x(x)dt,\quad dm^{(-)} = \rho(x+dx)Sv_x(x+dx)dt$$

$$dm = dm^{(+)} - dm^{(-)} = Sdt\left(\rho(x)v_x(x) - \rho(x+dx)v_x(x+dx)\right) =$$

$$= -Sdt\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)dx$$

$$dm = d\rho dV,\quad dV = Sdx$$

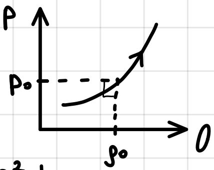
$$d\rho Sdx = -Sdtdx\,\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) = 0$$

48. Звуковая волна.

Рассмотрим случай слабой звуковой волны – волна, которая мало меняет значение параметров среды.

p_0, ρ_0 : $|p'| << p_0$, $|\rho'| << \rho_0$

$p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$



$p' = const\cdot\rho'$ $\qquad \frac{м^2}{с^2} = [const] = \frac{[p]}{[\rho]}$

$const \equiv c_0^2$, $[c_0] = м/с$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \rightarrow \rho_0\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}p' = 0,\quad p' = c_0^2\rho'$$

$$\rho_0\frac{\partial v_x}{\partial t} + c_0^2\frac{\partial\rho'}{\partial x} = 0 \text{ – дифференцируем по } t \rightarrow \rho_0\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + c_0^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\rho'}{\partial t}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = \rho_0^2\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \qquad v_x(x,t) = f_1(x - c_0t) + f_2(x + c_0t)$$

C_0 имеет физический смысл скорости звуковой волны. $\qquad c_0 = \sqrt{\frac{p'}{\rho'}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$

Возьмем уравнение адиабатического процесса.

$pV^{\alpha} = const$, $V = [м^3]$, для воздуха $\gamma = 7/5$

$\rho = m/V \rightarrow V = m/\rho \Rightarrow p\rho^{-\gamma} = const$

$$\frac{dp}{d\rho}\rho^{-\gamma} + p(-\gamma)\cdot\rho^{-\gamma+1} = 0 \rightarrow \frac{dp}{d\rho} = \gamma\frac{p}{\rho} \approx \gamma\frac{p_0}{\rho_0}$$

$c_0 = \sqrt{\gamma\frac{p_0}{\rho_0}}$, $\gamma = 7/5$, $p_0 = 10^5$ Па, $\rho_0 = 1{,}3$ кг/м³ $\Rightarrow c_0 = 330$ м/с – скорость звуковой волны